الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

مسابقة توظيف أساتذة التعليم الثانوي — دورة: ديسمبر 2009

اختبار في مادة: الرياضيات (التخصص) — المدة: 03 ساعات

التمرين الأول: (03 نقاط)

1) – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^3+1=0$.

2) – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\left(\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)^3=-1$ ، حيث يرمز " ln " إلى اللوغاريتم النبيري.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

m وسيط حقيقي. نعتبر التحويل النقطي T_m الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(m+i)z+m-1-i$.

1) – هل توجد قيمة للعدد m بحيث يكون T_m إنسحابا ؟

2) – عيّن العدد m بحيث يكون T_m دورانا. عيّن عندئذ المركز و زاوية له.

3) – نضع فيما يلي: $m=1$.

أ) – احسب لاحقة Ω النقطة الصامدة للتحويل النقطي T_m.

ب) – من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1 ، احسب $\frac{z'-1}{z-1}$.

– باستعمال تفسيرا هندسيا لكل من الطويلة و عمدة للعدد $\frac{z'-1}{z-1}$ ، برهن أنّ T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) – نعرّف في المستوي ، المتتالية النقطية (M_n) كما يلي:

$M_0=O$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $M_{n+1}=T_1(M_n)$.

أ) – مثّل النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4.

ب) – من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $d_n=\Omega M_n$.

بر هن أنّ (d_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها. هل (d_n) متقاربة ؟

التمرين الثالث: (06 نقاط)

1) – لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^2e^{1-x}$.

و نرمز بـــ (C_f) إلى تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) – عيّن نهايتي f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .

ب) – ادرس إتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها.

جـ) – إرسم (C_f).

2) – ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر التكامل I_n المعرّف بـــــ : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

أ) – باستعمال التكامل بالتجزئة جد علاقة بين I_{n+1} و I_n.

ب) – احسب I_1 و I_2.

جـ) – أعطِ تفسيرا هندسيا للعدد I_2 مبيّنا ذلك على الرسم.

3) – أ) – برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا المتباينة الآتية: $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$.

ب) – استنتج حصرا للعدد I_n ثم عيّن نهاية I_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

1. نعتبر المعادلة (1)ذات المجهول (n,m) من $\mathbb{Z}^2$: $\quad 11n-24m=1 \ldots\ldots (1)$

أ) – تحقق بواسطة نص نظرية أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا.

ب) – جد باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (1).

جـ) – عيّن مجموعة حلول المعادلة (1).

2. نريد إيجاد $PGCD\left(10^{11}-1\,,10^{24}-1\right)$.

أ) – بيّن أنّ العدد 9 يقسم كل من العددين : $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

ب) – بيّن أنّه إذا كانت الثنائية (n,m) حلا للمعادلة (1) فإنّ $9=\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)$.

– بيّن أنّ $\left(10^{11}-1\right)$ يقسم $\left(10^{11n}-1\right)$.

– استنتج من السؤال السابق أنّه يوجد عددين طبيعيين N و M حيث:
$\left(10^{11}-1\right)N-\left(10^{24}-1\right)M=9$.

د) – بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $\left(10^{24}-1\right)$ و $\left(10^{11}-1\right)$ يقسم 9.

هـ) – استنتج من الأسئلة السابقة $PGCD\left(10^{11}-1\,,10^{24}-1\right)$.