بسم الله الرحمن الرحيم

المستوى: السنة الثالثة متوسط (3 م)

المقطع الأول: الأعداد النسبية، تقايس المثلثات

الكفاءة المستهدفة: يحلّ المتعلم مشكلات متعلقة بالأعداد النسبية و يوظف خواص متعلقة بالمثلثات (حالات تقايس مثلثين) .

هيكلة تعلّمات المقطع:

1. الأعداد النسبية :
   (1) جمع و طرح عددين نسبيين، المجموع الجبري (تذكير)
   (2) ضرب عددين نسبيين (3) جداء عدة أعداد نسبية
   (4) قسمة عددين نسبيين (5) إدماج جزئي
2. تقايس المثلثات :
   (1) مدخل (2) الحالة الأولى (3) الحالة الثانية (4) الحالة الثالثة
   (5) حالتا تقايس مثلثين قائمين (6) إدماج جزئي
3. إدماج.

المورد المعرفي : تقايس المثلثات (مدخل)	المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على المثلثين المتقايسين.	الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير :

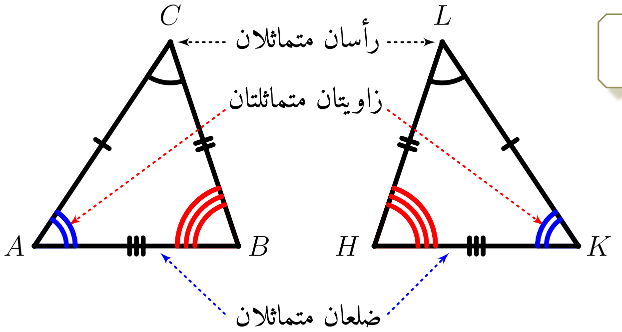
❶ خواص التناظر المحوري و التناظر المركزي.

❷ بعض خواص متوازي الأضلاع.

مرحلة البناء

1) تعريف :

المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.



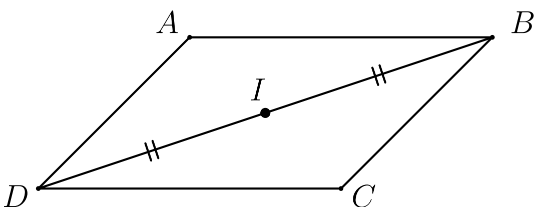
أمثلة:
- المثلثان المتناظران بالنسبة إلى نقطة أو إلى مستقيم هما مثلثان متقايسان.
- المثلثان اللذان لهما نفس الأطوال و نفس أقياس الزوايا هما مثلثان متقايسان.

2) العناصر المتماثلة : في المثلثين المتقايسين :
- كل ضلعين متقايسين هما ضلعان متماثلان.
- كل زاويتين متقايستين هما زاويتان متماثلتان.

مثال :

$ABCD$ متوازي الأضلاع و I منتصف قطره $[BD]$.

بما أنّ I مركز تناظر لمتوازي الأضلاع $ABCD$ فإنّ المثلثين ABD و BCD متناظران بالنسبة إلى I و بالتالي متقايسان. من تقايسهما نستنتج تقايس العناصر المتماثلة الآتية :

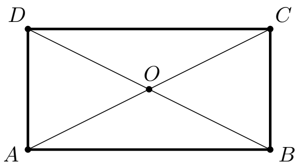


الأضلاع	الزوايا
$[AB]$ و $[CD]$	$\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$
$[BC]$ و $[AD]$	$\widehat{ABD}$ و $\widehat{BDC}$
$[BD]$ و $[BD]$ (ضلع مشترك)	$\widehat{CBD}$ و $\widehat{ADB}$

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق : $ABCD$ مستطيل.

اشرح لماذا المثلثان ABC و ABD متقايسان.



- لدينا من جهة (تقايس الأضلاع الثلاثة مثنى مثنى) :
  - في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متقايسان إذاً $AD = BC$.
  - قطرا المستطيل متقايسان و بالتالي $BD = AC$.
  - $[AB]$ ضلع مشترك.
- و من جهة أخرى (تقايس الزوايا مثنى مثنى) :
  - $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90°$.
  - قطرا المستطيل متناصفان و متقايسان منه $OB = OA$ و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه الأساسي O و بالتالي $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$.
  - المثلث OBC متساوي الساقين رأسه الأساسي O و بالتالي $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$. و بما أنّ $\widehat{OBC} = \widehat{ODA}$ (متبادلتان داخليا) فنستنتج أنّ $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

أضلاع المثلثين ABC و ABD متقايسان مثنى مثنى و زواياهما أيضا، نستنتج إذاً أنهما مثلثان متقايسان.

ملاحظة : يمكن ملاحظة أنّ هذين المثلثين متناظران بالنسبة إلى محور الضلع $[AB]$ و بالتالي فهما متقايسان.

للمنزل : مراجعة العناصر التالية

❶ **المتباينة المثلثية**: في المثلث، طول الضلع الأطول أصغر من مجموع طولَيْ الضلعين الآخرين.

❷ مجموع أقياس زوايا المثلث يساوي $180°$.

❸ إنشاء مثلثات في حالات مختلفة.

المورد المعرفي : **الحالة الأولى لتقايس مثلثين**

الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على الحالة الأولى لتقايس مثلثين و أن يتمكن من توظيفها في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)

الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : المثلثان المتقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.

مرحلة البناء

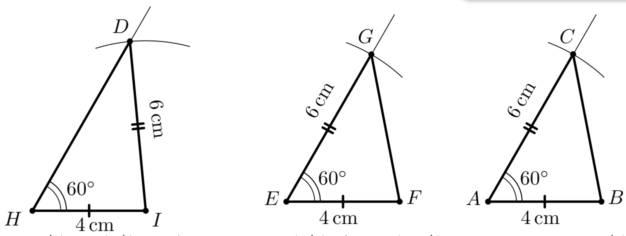
الوضعية التعلمية

أنشيء المثلثات التالية :
- $AB = 4cm$ ، $AC = 6cm$ و $\widehat{A} = 60°$.
- $EF = 4cm$ ، $EG = 6cm$ و $\widehat{E} = 60°$.
- $HI = 4cm$ ، $ID = 6cm$ و $\widehat{H} = 60°$.

❶ هل المثلثان ABC و EFG متقايسان ؟
❷ هل المثلثان ABC و DHI متقايسان ؟
❸ ما أوجه التشابه أو الاختلاف بين هذه الحالات ؟

يوزع المتعلمون على أفواج من ثلاثة تلاميذ و يقوم كل منهم بإنشاء إحدى المثلثات الثلاث على ورقة بيضاء، و قصه، ثم يجيبون على الأسئلة بمقارنة الأشكال.

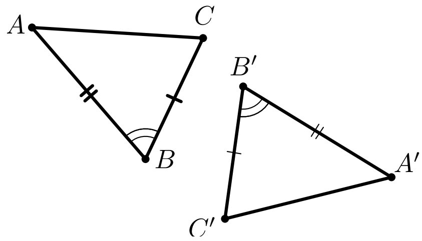
(ا) نلاحظ أنّ المثلثين ABC و EFG متقايسان (قابلان للتطابق) .
(ب) نلاحظ أنّ المثلث DHI لا يُقايس المثلث ABC (ليسا قابلين للتطابق) .



في الحالة (ا)، ضلعان من المثلث EFG يقايسان ضلعين من المثلث ABC و الزاوية المحصورة بين هذه الضلعين في المثلث EFG تقايس الزاوية المحصورة بين الضلعين المماثلين في المثلث ABC . لكن في الحالة (ب)، الزاوية $\widehat{H}$ في المثلث DHI و التي تقايس الزاوية $\widehat{A}$ في المثلث ABC ليست محصورة بين الضلعين الذين يقايسان ضلعين في المثلث ABC .

حتى يتقايس مثلثان، يكفي أن يتقايس ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في أحدهما مع ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما في الآخر.

مثال : في الشكل المقابل لدينا :

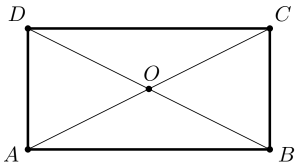


$\begin{bmatrix} BA = B'A' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ BC = B'C' \end{bmatrix}$ إذن $\begin{bmatrix} \text{فالمثلثان} \\ ABC \text{ و } A'B'C' \\ \text{متقايسان} \end{bmatrix}$.

ملاحظة : نتحدّث عن تقايس مثلثين و ليس تساويهما و بالتالي لا نكتب ~~$ABC = A'B'C'$~~ .

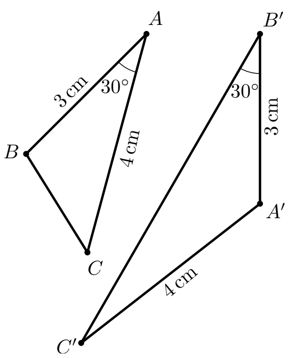
مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق 1 : ارسم مستطيلا $ABCD$ مركزه O ثم أنشيء قطريه.
عيّن كل المثلثات المتقايسة في هذا المستطيل.



المثلثات المتقايسة :
AOB و COD متقايسان.
AOD و COB متقايسان.
ABC ، ABD ، ACD و BCD متقايسة كلها.

تطبيق 2 :
❶ أنشيء مثلثا ABC بحيث $\widehat{A} = 30°$ ، $AB = 3cm$ و $AC = 4cm$.
❷ أنشيء مثلثا $A'B'C'$ بحيث $\widehat{B'} = 30°$ ، $A'B' = 3cm$ و $A'C' = 4cm$.
❸ هل المثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسان ؟ علِّل.



المثلثان ABC و $A'B'C'$ ليسا متقايسين: لدينا ضلعان من المثلث ABC يقايسان ضلعين من المثلث $A'B'C'$ و الزاوية المحصورة بينهما في المثلث ABC تقايس زاوية غير تلك المحصورة بين الضلعين في المثلث ABC .

(لو كانا متقايسين لكان لدينا : $AB = A'B'$، $AC = A'C'$ ، $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ، ... إلخ .
لكن $\widehat{A}$ زاوية حادة و $\widehat{A'}$ زاوية منفرجة ...).

المورد المعرفي : **الحالة الثانية لتقايس مثلثين**
الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على الحالة الثانية لتقايس مثلثين و أن يتمكن من توظيفها في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : الحالة الأولى لتقايس مثلثين.

مرحلة البناء

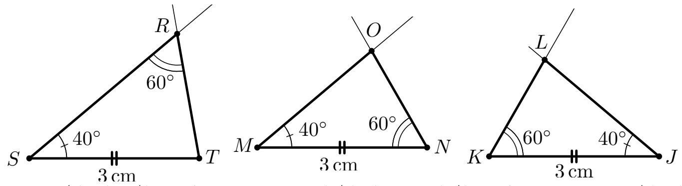
الوضعية التعلمية

أنشئ المثلثات التالية :
- $\widehat{J}=40^\circ$ ، $\widehat{K}=60^\circ$ و $KJ=3\text{cm}$.
- $\widehat{M}=40^\circ$ ، $\widehat{N}=60^\circ$ و $MN=3\text{cm}$.
- $\widehat{S}=40^\circ$ ، $\widehat{R}=60^\circ$ و $ST=3\text{cm}$.

❶ هل المثلثان LKJ و MNO متقايسان ؟
❷ هل المثلثان LKJ و RST متقايسان ؟
❸ ما أوجه التشابه أو الاختلاف بين هذه الحالات ؟

! يوزع المتعلمون على أفواج من ثلاثة تلاميذ و يقوم كل منهم بإنشاء إحدى المثلثات الثلاث على ورقة بيضاء و قصه، ثم يجيبون على الأسئلة بمقارنة الأشكال.

! **ملاحظة** : لإنشاء النقطة R يمكن :
① أن نبدأ بالزاوية $\widehat{S}=40^\circ$ ثم الزاوية $\widehat{T}=80^\circ$ و النقطة R هي نقطة تقاطع ضلعيهما،
② أن ننشئ الزاوية $\widehat{S}$ و نعين نقطة R' على الضلع الذي لا يشمل النقطة T ثم نرسم الزاوية $\widehat{R'}=60^\circ$ (نحو النقطة T) و بعدها نرسم المستقيم الذي يشمل T و يوازي ضلع الزاوية $\widehat{R'}$ الذي لا يشمل S فيقطع (SR') في النقطة R .



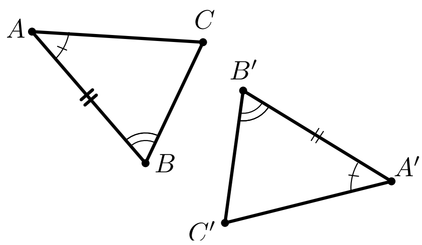
(ا) نلاحظ أنّ المثلثين LKJ و MNO متقايسان (قابلان للتطابق) .
(ب) نلاحظ أنّ المثلث RST لا يُقايس المثلث LKJ (ليسا قابلين للتطابق) .

في الحالة (ا)، زاويتان من المثلث MNO تقايسان زاويتين من المثلث LKJ و الضلع المحصور بين هاتين الزاويتين في المثلث MNO يقايس الضلع المحصور بين الزاويتين المماثلتين في المثلث LKJ . لكن في الحالة (ب)، الضلع ST في المثلث RST و الذي يقايس الضلع KJ في المثلث LKJ ليس محصورا بين الزاويتين اللتين تقايسان زاويتين في المثلث LKJ .

حتى يتقايس مثلثان، يكفي أن تتقايس زاويتان و الضلع المحصور بينهما في أحدهما مع زاويتين و الضلع المحصور بينهما في الآخر.

مثال : في الشكل المقابل لدينا :

$\left[\begin{array}{c}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ AB=A'B'\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right]$ إذن [فالمثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسان] .



! ملاحظة : نتحدّث عن تقايس مثلثين و ليس تساويهما و بالتالي لا نكتب $\cancel{ABC = A'B'C'}$.

مرحلة إعادة الاستثمار

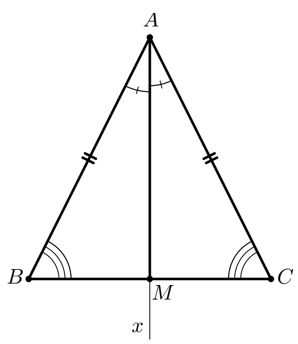
تطبيق : ABC مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي A . $[Ax)$ منصّف الزاوية $\widehat{A}$ يقطع $[BC]$ في M .
برهن بطريقتين أنّ المثلثين ABM و ACM متقايسان.

الطريقة الأولى : (زاويتان و الضلع المحصور بينهما)

لدينا : $\left[\begin{array}{c}\widehat{BAM}=\widehat{CAM}\\ AB=AC\\ \widehat{B}=\widehat{C}\end{array}\right]$ إذن [المثلثان ABM و ACM متقايسان] .

الطريقة الثانية : (ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما)

لدينا : [$[AM]$ ضلع مشترك ، $\widehat{BAM}=\widehat{CAM}$ ، $AB=AC$] إذن [المثلثان ABM و ACM متقايسان] .



المورد المعرفي : **الحالة الثالثة لتقايس مثلثين**
الكفاءة المستهدفة : أن يتعرف التلميذ على الحالة الثالثة لتقايس مثلثين و أن يتمكن من توظيفها في براهين بسيطة

المستوى : الثالث متوسط (3 م)
الوسائل التعليمية المستخدمة : المنهاج، الأدوات الهندسية.

مرحلة الانطلاق

تذكير : الحالتان الأولى و الثانية لتقايس مثلثين.

مرحلة البناء

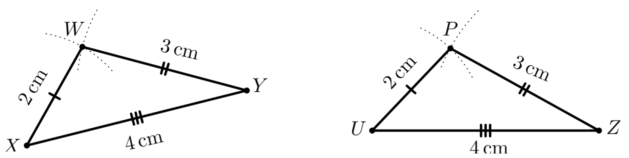
الوضعية التعلمية

أنشيء المثلثين :
- $PU = 2\text{cm}$ ، $PZ = 3\text{cm}$ و $UZ = 4\text{cm}$.
- $WX = 2\text{cm}$ ، $WY = 3\text{cm}$ و $XY = 4\text{cm}$.

قارن بين المثلثين PUZ و WXY . هل هما متقايسان

! يوزع المتعلمون على أفواج من تلميذين و يقوم كل منهم بإنشاء أحد المثلثين على ورقة بيضاء و قصه، ثم يجيبون على الأسئلة بمقارنة الأشكال.

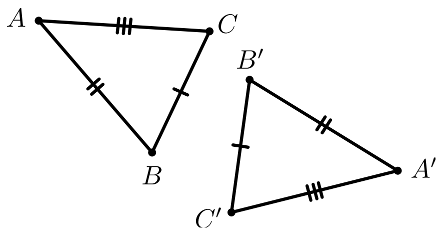
نلاحظ أنّ المثلثين PUZ و WXY متقايسان (قابلان للتطابق) حيث يقايس كل ضلع من المثلث PUZ ضلعاً من المثلث WXY .
من تقايسهما، نستنتج تقايس العناصر المتماثلة الآتية :
$WX = PU$ ؛ $WY = PZ$ ؛ $XY = UZ$ ؛ $\widehat{W} = \widehat{P}$ ؛ $\widehat{X} = \widehat{U}$ ؛ $\widehat{Y} = \widehat{Z}$.



حتى يتقايس مثلثان، يكفي أن يُقايس كل ضلع من أحدهما ضلعاً من الآخر.

مثال : في الشكل المقابل لدينا :

$$\begin{bmatrix} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{bmatrix} \text{ إذن } \begin{bmatrix} \text{المثلثان} \\ ABC \text{ و } A'B'C' \\ \text{متقايسان} \end{bmatrix}$$.



! ملاحظة : نتحدث عن تقايس مثلثين و ليس تساويهما و بالتالي لا نكتب ~~$ABC = A'B'C'$~~ .

الخلاصة

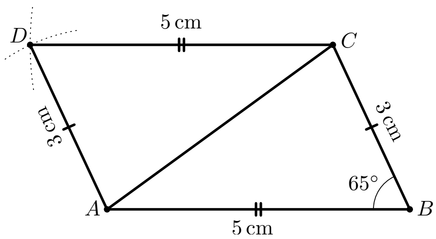
حتى يتقايس مثلثان، يكفي :
- أن يتقايس ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في أحدهما مع ضلعين و الزاوية المحصورة بينهما في الآخر.
- أو أن تتقايس زاويتان و الضلع المحصور بينهما في أحدهما مع زاويتين و الضلع المحصور بينهما في الآخر.
- أو أن يُقايس كل ضلع من أحدهما ضلعاً من الآخر.

! لا يكفي أن تُقايس كل زاوية من مثلث ما زاويةً من مثلث آخر حتى يتقايس المثلثان !

مرحلة إعادة الاستثمار

تطبيق : ارسم مثلثين ABC و ACD يشتركان في الضلع $[AC]$ بحيث $AB = CD = 5\text{cm}$ ، $\widehat{B} = 65°$ و $AD = BC = 3\text{cm}$.
برهن أنّ المثلثين ABC و ACD متقايسان.

مراحل الإنشاء :
(ا) نرسم الضلع $[AB]$
(ب) ثم الزاوية $\widehat{B}$
(ج) بعدها الضلعين BC و AC
(د) و في الأخير، الضلعين AD و CD (بالمدور) .



لدينا : $$\begin{bmatrix} AB = CD \\ [AC] \text{ ضلع مشترك} \\ BC = AD \end{bmatrix} \text{ إذن } \begin{bmatrix} \text{المثلثان} \\ ABC \text{ و } ACD \\ \text{متقايسان} \end{bmatrix}$$.

! **ملاحظة** : في الرباعي $ABCD$ كل ضلعين متقابلين متقايسان و بالتالي فهو متوازي الأضلاع.