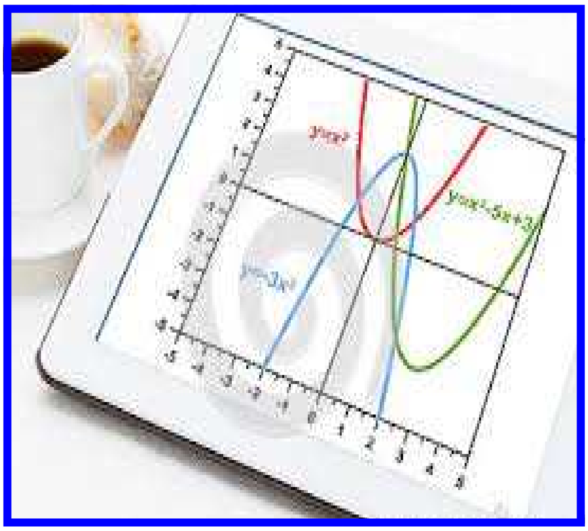
رياضيات
سلسلة 2
2022-2021
المستوى
2 ر - 2 ع ت
إعداد الأستاذ
مراد حسن

الدوال كثيرات الحدود

وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

1- معنى كثير حدود.
2- جذر كثير حدود . تحليل كثير حدود
3- المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية
4- المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع
5- الشكل النموذجي
6- المعادلات و المتراجحات الصماء
7- المعادلات و المتراجحات الوسيطة
8- مسائل مختلفة



قال رسول الله صلى الله عليه و سلم

معنى كثير حدود

دالة كثير الحدود هي كل دالة من الشكل :

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

- n: عدد طبيعي يسمى درجة كثير الحدود.
- $a_n,\ldots,a_1,a_0$: اعداد حقيقية ثابتة تسمى معاملات كثير الحدود.

انتبه

- يكون كثير حدود معدوما إذا و فقط إذا كانت كل معاملاته معدومة.
- يكون كثيرا حدود ، غير معدومين، متساويين إذا و فقط إذا كانا من نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

اعلم

1- مجموع، فرق و جداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود.
2- مركب كثيري حدود هو كثير حدود.
3- جداء كثيري حدود غير معدومين درجتاهما n و p على الترتيب هو كثير حدود درجته n+p

جذر كثير حدود

α جذر لكثير الحدود f معناه $f(\alpha)=0$

تحليل كثير حدود

اذا كان α جذر لكثير الحدود f فإنه يوجد كثير حدود g يحقق:

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)$$

لتعيين g(x) نستعمل:

*المطابقة: تساوي كثيري حدود و ذلك بعد النشر و التبسيط و الترتيب للعبارة (x-α).g(x)

*أو: خوارزمية القسمة.

لاحظ

العبارة : ax^2+bx+c هي عبارة كثير حدود من الدرجة الثانية

العدد : $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز كثير الحدود من الدرجة الثانية

العبارة : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ تسمى الشكل النموذجي لكثير حدود من الدرجة الثانية

قال الإمام أحمد

المعادلة من الدرجة الثانية

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$ax^2+bx+c=0$$

حيث c.b.a، أعداد حقيقية ثابتة مع a غير معدوم .

حل المعادلة من الدرجة الثانية

لحل المعادلة: $ax^2+bx+c=0$ نحسب المميز: $\Delta=b^2-4ac$

إذا كان	فإن
$\Delta<0$	المعادلة ليس لها حل
$\Delta=0$	المعادلة تقبل حل مضاعف $x_0=\frac{-b}{2a}$
$\Delta>0$	المعادلة تقبل حلين $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

هل تعلم ؟

إذا حفظت في اليوم 3 آيات من القرآن الكريم فإنك ستحفظ القرآن كله في مدة 5 سنوات و 10 أشهر و 13 يوما

مفاتيح النجاح الدراسي : 2- العطاء يساوي الأخذ

النجاح عمل وجد وتضحية وصبر، ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجداً، حصد نجاحاً وثماراً .. فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقق النجاح والطموح والهدف .. فمن جدّ وجد ومن زرع حصد.
وقل من جد في أمر يحاوله * * * وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر

المتراجحة من الدرجة الثانية

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c \succ 0$

$ax^2+bx+c \geq 0$

$ax^2+bx+c \prec 0$

$ax^2+bx+c \leq 0$

حيث a، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع a غير معدوم.
لحلها : ندرس إشارة إشارة كثير الحدود: ax^2+bx+c

إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

إذا كان	التحليل	الإشارة
$\Delta \prec 0$	لا يحلل	x : $-\infty$ ... $+\infty$ ؛ ax^2+bx+c : إشارة a
$\Delta = 0$	$a(x-x_0)^2$	x : $-\infty$ ، x_0 ، $+\infty$ ؛ ax^2+bx+c : إشارة a ، 0 ، إشارة a
$\Delta \succ 0$	$a(x-x_1)(x-x_2)$	x : $-\infty$ ، x_1 ، x_2 ، $+\infty$ ؛ ax^2+bx+c : إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، إشارة a

مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

	$ax^2+bx+c=0$
$\Delta \geq 0$	المعادلة تقبل حلين : $x' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ، $x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
مجموع الحلين $S=x'+x''$	$S = -\frac{b}{a}$
جداء الحلين $P=x'\times x''$	$P = \frac{c}{a}$

لتعيين عددين علم مجموعهما **S** و جداءهما **P** نحل المعادلة :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

المعادلة مضاعفة التربيع

المعادلة مضاعفة التربيع، هي كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

$$ax^4+bx^2+c=0$$

حيث a.b.c، أعداد حقيقية ثابتة مع a غير معدوم .

يؤول حلها إلى حل الجملة: $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$

إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

$ax^2+bx+c=0$ مع $\Delta \succ 0$

$\frac{c}{a} < 0$		فإن المعادلة تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
$\frac{c}{a} > 0$	$-\frac{b}{a} > 0$	فإن المعادلة ت قبل حلين موجبين تماما
$\frac{c}{a} > 0$	$-\frac{b}{a} < 0$	فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما

المتراجحات مضاعفة التربيع

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الأشكال التالية:

$ax^2+bx+c \succ 0$

$ax^2+bx+c \geq 0$

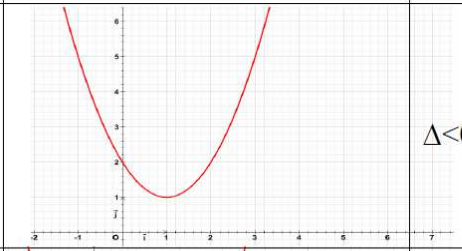
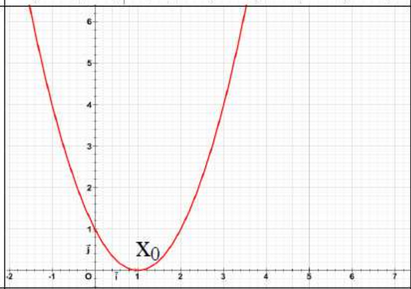
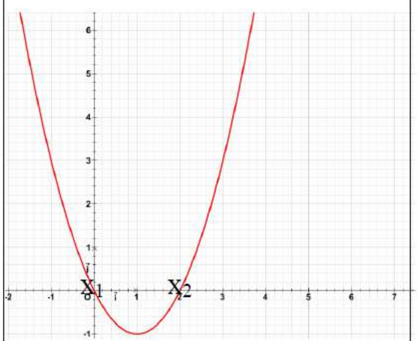
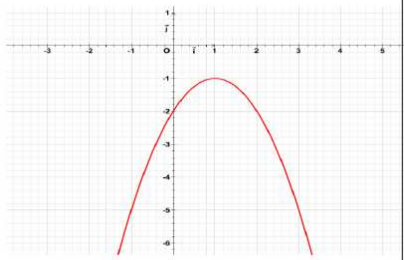
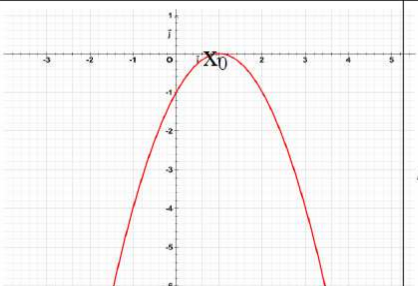
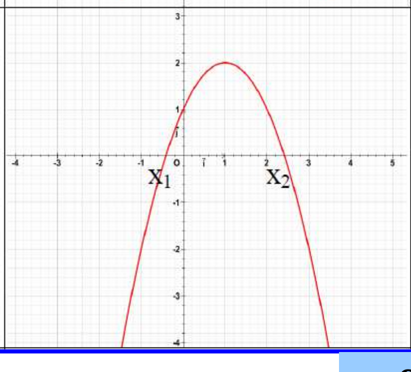
$ax^2+bx+c \prec 0$

$ax^2+bx+c \leq 0$

a، b وc أعداد حقيقية مع a غير معدوم.
لحلها : ندرس إشارة كثير الحدود ax^4+bx^2+c

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم
((من سلك طريقاً يلتمس فيه علماً سهل الله له به طريقاً إلى الجنة)) رواه مسلم

التفسير البياني لإشارة كثير□دود من الدرجة الثانية

		الرسم	القراءة البيانية	التعليق
$a>0$	$\Delta<0$		المنحني يقع كليا فوق حامل محور الفواصل	من أجل كل عدد حقيقي x يكون $ax^2+bx+c>0$
	$\Delta=0$		المنحني يقع كليا فوق حامل محور الفواصل و يمسه في النقطة ذات الفاصلة x_0	من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\in\mathbb{R}-\{x_0\}$ يكون $ax^2+bx+c>0$ و من أجل $x=x_0$ يكون $ax^2+bx+c=0$
	$\Delta>0$		المنحني يقطع حامل محورا لفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 ; x_2	*من أجل أي عدد حقيقي $x\in]-\infty\ ;x_1[\cup]x_2\ ;+\infty[$ يكون $a\,x^2+bx+c>0$ *من أجل أي عدد حقيقي $x\in]x_1\ ;\ x_2[$ يكون $a\,x^2+bx+c<0$. * يكون $ax^2+bx+c=0$ **من أجل x_1 ; x_2**
$a<0$	$\Delta<0$		المنحني يقع كليا تحت حامل محور الواصل	من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $ax^2+bx+c<0$
	$\Delta=0$		المنحني يقع كليا تحت حامل محور الفواصل و يمسه في النقطة ذات الفاصلة x_0	من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\in\mathbb{R}-\{x_0\}$ يكون $ax^2+bx+c<0$ و من أجل $x=x_0$ يكون $ax^2+bx+c=0$
	$\Delta>0$		المنحني يقطع حامل محورا لفواصل في نقطتين فاصلتاهما x_1 ; x_2	*من أجل أي عدد حقيقي $x\in]-\infty\ ;x_1[\cup]x_2\ ;+\infty[$ يكون $a\,x^2+bx+c<0$ *من أجل أي عدد حقيقي من المجال $]x_1\ ;\ x_2[$ يكون $a\,x^2+bx+c>0$ * يكون $ax^2+bx+c=0$ **من أجل x_1 ; x_2**

تمرين1:

من بين الدوال التالية ما هي الدوال التي تمثل كثير□دود من الدرجة الثانية؟

أ) $f(x) = -3(x-1)(x+3)$ ب) $f(t) = (t+2)^2-(t-2)^2$

جـ) $f(x) = (3x+1)(x-2)-3x^2+x-1$ د) $f(a) = \frac{1}{a} - (a-1)^2$

هـ) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}\,x + 1$ و) $f(x) = (\sqrt{x}-1)^2$

تمرين2:

1. $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية حيث : $p(x) = x^2-x-2$
أحسب $p(2)$ ثم أعط تحليلا لـ $p(x)$.
2. $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة حيث : $p(x) = x^3+2x^2-5x-6$
أحسب $p(2)$ ثم أعط تحليلا لـ $p(x)$.

تمرين3:

نعتبر الدالة p المعرفة بـ : $p(x) = (x^2+1)^2-(4x+2)^2$

1. بين أن p هي دالة كثير حدود مع تعيين درجتها .
2. حل المعادلة $p(x) = 0$.

تمرين4:

نعتبر الدالة p المعرفة بـ :

$p(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + k$ حيث k عدد حقيقي

1. عين قيمة k حتى يكون $x = 4$ جذرا لـ $p(x)$
2. من أجل قيمة k المحصل عليها حلل $p(x)$.

تمرين5:

نعتبر الدالة كثير الحدود p المعرفة بـ :

$p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

نرمز بـ α ، β و γ لجذور $p(x)$.

1. أكتب بدلالة α ، β و γ العبارة $p(x)$.
2. بين أن $\alpha+\beta+\gamma=5$; $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=3$
و $\alpha\beta\gamma=1$
3. علما أن $\alpha = 2-\sqrt{5}$ و $\beta = 1$ أحسب γ .

تمرين6: النشر و التحليل

تذكر

$(a+b)^2 =$	$(a-b)^2 =$	$(a+b)(a-b) =$

حلل

$x^2+5x+\frac{25}{4} =$
$x^2-7x+\frac{49}{4} =$
$4x^2-3 =$
$-98x^2+72 =$
$(x-1)^2-3$
$-2(3x-1)^2+10 =$

أنشر

$(x+\frac{9}{2})^2 =$
$(x-\frac{3}{4})^2 =$
$(3x-\sqrt{7})(3x+\sqrt{7}) =$
$-3(5x+2)(5x-2) =$
$[(x-7)+\sqrt{3}][(x-7)-\sqrt{3}]$
$3(2x+3-\sqrt{2})(2x+3+\sqrt{2}) =$

تمرين7: الشكل النمو□جي

1- أكمل النقط للحصول على عبارة من الشكل:

$(x \pm \alpha)^2 \pm \beta$ مع $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$1)\; x^2 + 2x - 8 = (\ldots+\ldots)^2 - \ldots - 8$$
$$= (\ldots+\ldots)^2 - \ldots$$

$$2)\; x^2 - 2x + \frac{3}{4} = (\ldots+\ldots)^2 - \ldots + \frac{3}{4}$$
$$= (\ldots+\ldots)^2 - \ldots$$

 بالتوفيق للجميع إنشاء الله

تمرين7: الشكل النموذجي (تابع)

$$3)x^2+6x+7=(...+...)^2-...+7$$
$$=(...+...)^2-...$$

$$4)x^2-6x-7=(...+...)^2-...-7$$
$$=(...+...)^2-...$$

2- للحصول على عبارة من الشكل: $a\left[(x\pm\alpha)^2\pm\beta\right]$

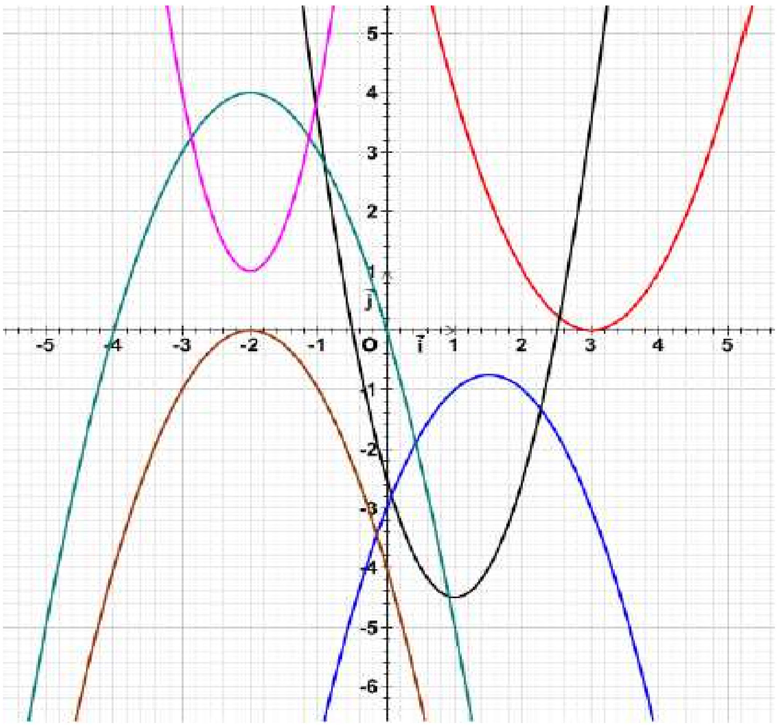
$$1)2x^2-8x=(.......)^2=2\left[(.......)^2-....\right]$$

$$2)4x^2+16x+15=4\left[(......)^2-...+...\right]$$
$$=4\left[(......)^2-...\right]$$

$$3)2x^2-x-\frac{1}{2}=2(......)$$
$$=2\left[(......)^2-...-...\right]$$
$$=2\left[(......)^2-...\right]$$

$$4)-4x^2+8x-1=...(........)$$
$$=-4\left[(.......)^2-...+...\right]$$
$$=-4\left[(.......)^2-...\right]$$

تمرين8: تعطى التمثيلات البيانية لستة دوال كثيرات حدود من الدرجة الثانية



$f_1(x)=x^2-6x+9$ $\quad f_2(x)=2x^2-4x+\frac{5}{2}$ $\quad f_3(x)=-x^2+3x-3$

$f_4(x)=-x^2-4x$ $\quad f_5(x)=3x^2+12x+13$ $\quad f_6(x)=-x^2-4x-4$

1- من الشكل تعرف على منحنى كل دالة.

2- بقراءة بيانية أعط جدول إشارة كل دالة.

3- تحقق جبريا من النتائج السابقة.

تمرين9: المعادلات و المتراجحات من الدرجة الثانية

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \qquad 5x^2-4x+2=0$$

$$x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0 \qquad 4x^2+3x-1=0$$

2) حل المعادلتين $x^4-7x^2+12=0 \quad x\in\mathbb{R}$

$2x-7\sqrt{x}-4=0 \quad x\in\mathbb{R}$

2 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية

$$3x^2-2x-8<0 \quad ; \quad -2x^2+5x-3\le 0$$

$$4x^2-2x+1>0 \quad ; \quad -3x^2+\sqrt{3}x-1\ge 0$$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$(2x-1)^2+6\le(3x-2)(x-2) \quad ،$$

$$\frac{3x-4}{x}+\frac{8-2x}{x+2}\ge 2 \quad ، \quad \frac{x^2-2x+3}{2x^2-3x+1}\le 1$$

المعادلات و المتراجحات الوسيطية

تمرين 10:

1. $f(x)$ كثير حدود و α عدد حقيقي . عين في كل من الحالات التالية قيم الوسيط m حيث يكون α جذرا لـ $f(x)$:

$$f(x)=x^2-3mx+2m-7 \qquad \alpha=2$$

$$f(x)=(m+2)x^2-(2m+4)x+m-2 \qquad \alpha=-3$$

2. حل و ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، كل من المعادلات التالية :

- $x^2+2mx+2m^2+3=0$
- $(m+1)x^2-(m+3)x-m+3=0$

3. عين مجموعة قيم العدد الحقيقي m بحيث يكون :

$$x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-2>0$$

$$mx^2+4(m+1)x+m-5<0$$

تمرين 10:

أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول كل من المعادلات التالية :

1. $x^2 - 2mx + 3m = 0$
2. $mx^2 - 2(m+1)x - 5 = 0$

تمرين11: المعادلات و المتراجحات مضاعفة التربيع

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين :

$x^4 - 7x^2 + 1 = 0$ * $\quad$ $4x^4 + 12x^2 + 9 = 0$ *

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين :

$2x^4 - 3x^2 + 1 < 0$ * $\quad$ $x^4 - 2x^2 + 5 \geqslant 0$ *

تمرين12: المعادلات و المتراجحات الصماء

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$\sqrt{x+3} = 2x$ * $\quad$ $\sqrt{3x+1} = 1 - x$ * $\quad$ $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4} = 1$ *

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$\sqrt{x-3} > x-$ * $\quad$ $\sqrt{x-2} - x + 4 < 0$

تمارين و مسائل عامة

تمرين13: نعتبر كثير الحدود

: $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 12$.

1) احسب $f(0)$ ، $f(-4)$ ، $f(\sqrt{3})$

- بين أن العدد (-4) جذرا لكثير الحدود $f(x)$.

2) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x+4)(ax^2 + bx + c)$

3) حل فى $\mathbb{R}$ المعادلات التالتين: $f(x) = 0$ ، $f(x) = 12$

تمرين 14 :

نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية :

$$mx^2 - (m+1)x + \frac{5}{4}m - \frac{1}{4} = 0 \quad ....(1)$$ (m وسيط حقيقي)

عين قيم m حتى تقبل المعادلة (1)

1) جذرا مضاعفا احسبه ، 2) حلين موجبين تماما.

3) حلين سالبين تماما ، 4) حلين مختلفين في الإشارة

5) لا تقبل المعادلة (1) حلولا

تمرين 15 :

نعتبر كثير الحدود : $p(x) = 2x^3 + ax^2 + x + 2$

1) **حدد العدد a حتى يكون 1 جذر لـ p(x) .**

2) **نضع**

أ - اوجد كثير الحدود Q(x)

حيث : $p(x) = (x-1) \cdot Q(x)$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x) = 0$ ثم حل في $\mathbb{R}$

المتراجحة $P(x) \prec 0$

ج- حل في المجال $\left]\frac{-1}{2}; +\infty\right[$ المعادلة

$$x + |2x^2 - 3x - 2| = |x|$$

16 نعتبر دائرة قطرها [AB] حيث: AB=4

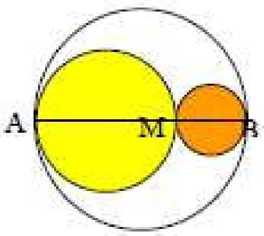
M نقطة من [AB]

ننشئ الدائرتين اللتين قطراهما [AM] و [MB] نرمز بـ S إلى مساحة الحيز غير المظلل و بـ a لمساحة القرص الذي قطره [AB]. نضع AM=x

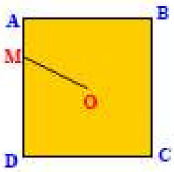
1) احسب S بدلالة x

2) هل توجد وضعية للنقطة M يكون من أجلها: $S = \frac{1}{2}a$

3) عين قيمة x التي يكون من أجلها: $2S \succ a$



17 ABCD مربع ضلعه 4 و مركزه O. النقطة M تتحرك على حافة المربع في الاتجاه ABCD انطلاقا A . نسمي x المسافة التي تقطعها النقطة M و f الدالة التي ترفق بكل x الطول OM ، نرمز له f(x).



1) بالاستعانة بالعلاقات الهندسية أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال [0 ; 4] .

2) لماذا الدالة f دالة دورية دورها 4 ؟

3) أنشئ التمثيل البياني للدالة f على المجال [0 ; 16] .

4) أعط قيمة عظمى وقيمة صغرى للدالة f.