معادلة مستقيم

Prof Mustapha
KHALDI

I. مفاهيم أساسية

◈ كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له

◈ (AB) و (CD) لهما نفس معامل التوجيه $\Leftrightarrow$ $(AB)//(CD)$

II. حساب معامل وشعاع توجيه مستقيم

المستقيم	$\boxed{ax+by+c=0}$	$\boxed{y=ax+b}$
معامل توجيهه (الميل)	$-\dfrac{a}{b}$	a
شعاع توجيهه	$\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}$

✱ معامل توجيه مستقيم يشمل نقطتين $A(x_A\,;\,y_A)$ ، $B(x_B\,;\,y_B)$ هو $\boxed{a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$

III. قاعدة المستقيمان المتوازيان

المستقيمان المتوازيان لهما نفس معامل التوجيه ونفس شعاع التوجيه

IV. المعادلة المكافئة:

يمكن الانتقال من المعادلة $\boxed{ax+by+c=0}$ إلى المعادلة $\boxed{y=ax+b}$ بتغيير أطراف المساواة و بضرب أو قسمة المعاملات على عدد حقيقي غير معدوم.

<u>مثال:</u> كل المعادلات التالية متكافئة ولنفس المعادلة.

$$2x-y-4=0 \Leftrightarrow -2x+y+4=0 \Leftrightarrow -6x+3y+12=0$$
$$\Leftrightarrow -12x+6y+24=0 \Leftrightarrow 12x-6y-24=0 \Leftrightarrow y=2x-4$$

V. طرق إيجاد معادلة مستقيم

1) مستقيم يشمل نقطتين

I. طريقة ① (الارتباط الخطي)

<u>مثال:</u> إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$A(1;-1)$; $B(4;5)$

❶ حساب مركبة $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\ 5-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\ 6\end{pmatrix}$$

❷ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M\in(AB)$

❸ نحسب مركبة $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y+1\end{pmatrix}$$

❹ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AM} \Rightarrow \begin{vmatrix}3 & x-1\\ 6 & y+1\end{vmatrix}=0$$
$$\Rightarrow 3(y+1)-6(x-1)=0$$
$$\Rightarrow \boxed{-6x+3y+9=0}$$

إذن معادلة (AB) هي: $\boxed{y=2x-3}$

✓ طريقة ② (معامل التوجيه)

<u>مثال:</u> إيجاد معادلة المستقيم (AB) حيث:

$A(1;-1)$; $B(4;5)$

❶ حساب معامل التوجيه a

$$a=\frac{5-(-1)}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$

و منه معادلة (AB) هي: $y=2x+b$

❷ نحسب المعامل b بتعويض احداثيي A أو B في المعادلة

نعوض A تصبح المعادلة $-1=2(1)+b$

$\Rightarrow b=-3$

إذن معادلة (AB) هي: $\boxed{y=2x-3}$

أو من الشكل: $\boxed{2x-y-3=0}$

*بفهم <u>المعادلة المكافئة</u> يتمكن التلميذ من الاستيعاب الكامل للدرس وتصبح له الحرية التامة في اختيار الطريقة المناسبة له

Prof Mustapha KHALDI

2) مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

✓ **طريقة ③ (الارتباط الخطي)**

مثال: $\vec{v}\binom{3}{4}$; $E(2;1)$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

❶ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M \in (D)$

❷ نحسب مركبة $\overrightarrow{EM}$

$$\overrightarrow{EM}\binom{x-2}{y-1}$$

❸ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{v}$ و $\overrightarrow{EM}$

$$\vec{v} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{EM} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & x-2 \\ 4 & y-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3(y-1) - 4(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-4x + 3y + 5 = 0}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$

✓ **طريقة ④ (استخلاص المعاملات)**

مثال: $\vec{v}\binom{3}{4}$; $E(2;1)$

أوجد معادلة المستقيم (D) الذي يشمل E و شعاع توجيهه $\vec{v}$

❶ نستخلص المعاملات a و b من شعاع التوجيه

لدينا $\vec{v}\binom{3}{4}$ شعاع توجيه من الشكل $\vec{v}\binom{-b}{a}$

و منه نستنتج أن $\begin{cases} -b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = -3} \\ \boxed{a = 4} \end{cases}$

أي معادلة (D) من الشكل $4x - 3y + c = 0$

❷ إيجاد المعامل c

نعوض E في المعادلة $4x - 3y + c = 0$

$$\Rightarrow 4(2) - 3(1) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -5}$$

إذن معادلة (D) هي: $\boxed{4x - 3y - 5 = 0}$

3) مستقيم يشمل نقطة ويوازي مستقيم

✓ **طريقة ⑤ (الارتباط الخطي)**

مثال:

(D) مستقيم معادلته $5x + 2y - 6 = 0$; $F(-3;4)$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

❶ نستخلص شعاع التوجيه $\vec{u}$ للمستقيم (D)

$$\vec{u}\binom{-b}{a} \Rightarrow \boxed{\vec{u}\binom{-2}{5}}$$

❷ نفرض النقطة $M(x;y)$ حيث $M \in (\Delta)$

❸ نحسب مركبة $\overrightarrow{FM} \Leftarrow \overrightarrow{FM}\binom{x+3}{y-4}$

❹ نطبق علاقة الارتباط الخطي بين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{FM}$

$\boxed{(\Delta) \mathbin{/\!/} (D) \Leftarrow \vec{u} \text{ و } \overrightarrow{FM} \text{ مرتبطان خطيا}}$

$$\vec{u} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{FM} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & x+3 \\ 5 & y-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(y-4) - 5(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-5x - 2y - 7 = 0}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$

✓ **طريقة ⑥ (استنتاج المعاملات)**

مثال:

(D) مستقيم معادلته $5x + 2y - 6 = 0$; $F(-3;4)$

أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل F و يوازي (D)

❶ $(\Delta) \mathbin{/\!/} (D) \Leftarrow (\Delta)$ و (D) لهما نفس معامل وشعاع التوجيه.

$\Leftarrow (\Delta)$ و (D) لهما نفس المعاملين a و b

و منه معادلة (Δ) من الشكل $\boxed{5x + 2y + c = 0}$

❷ إيجاد المعامل c

نعوض F في المعادلة $5x + 2y + c = 0$

$$\Rightarrow 5(-3) + 2(4) + c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 7}$$

إذن معادلة (Δ) هي: $\boxed{5x + 2y + 7 = 0}$

$(D) \mathbin{/\!/} (\Delta) \Leftarrow (D)$ و (Δ) لهما نفس معامل و شعاع التوجيه

4) مستقيم معرف بنقطة ومعامل توجيه

✓ **طريقة ⑦ (استخلاص المعاملات)**

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6;5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

❶ من معامل التوجيه نستنتج المعاملين a و b

$$-\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -3} \\ \boxed{b = 2} \end{cases}$$

و منه معادلة (K) من الشكل $-3x + 2y + c = 0$

❷ نعوض G في المعادلة تصبح:

$$-3(6) + 2(5) + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

إذن معادلة (K) هي $\boxed{-3x + 2y + 8 = 0}$

✓ **طريقة ⑧ (تعويض معامل التوجيه)**

مثال: أوجد معادلة المستقيم (K) الذي يشمل $G(6;5)$ و معامل توجيهه $\frac{3}{2}$

❶ نعوض معامل التوجيه في المعادلة $y = ax + b$

إذن معادلة (K) من الشكل $y = \frac{3}{2}x + b$

❷ نعوض G في المعادلة تصبح $5 = \frac{3}{2}(6) + b$

$$\Rightarrow \boxed{b = -4}$$

و منه معادلة (K) هي $\boxed{y = \frac{3}{2}x - 4}$

أو من الشكل $\boxed{3x - 2y - 8 = 0}$

حل جملة معادلتين (تقاطع مستقيمين)

I]. طريقة الجمع

تعتمد طريقة الجمع على التخلص من إحدى المجهولين x أو y لتصبح معادلة ذات مجهول واحد

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 3x+6y-15=0 & \dots ① \\ 2x-4y+6=0 & \dots ② \end{cases}$$

للتخلص من المجهول x يجب ضرب المعادلة ① في (2) و المعادلة ② في (-3) ليصبح معاملا المجهول x متعاكسين، فتصبح الجملة:

$$\begin{cases} 6x+12y-30=0 & \dots ③ \\ -6x+12y-18=0 & \dots ④ \end{cases}$$

بجمع المعادلتين ④ + ③ نجد: $24y-48=0$

$\Longrightarrow \boxed{y=2}$

بالتعويض في المعادلة ① أو ② نجد $\boxed{x=1}$

و منه الثنائية $(1;2)$ هي حل للجملة و النقطة $(1;2)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين

II]. طريقة التعويض

نستعمل طريقة التعويض غالبا عندما يكون معامل أحد المجاهيل $=1$

مثال: أوجد نقطة تقاطع المستقيمين التاليين

$$\begin{cases} 5x-4y+6=0 & \dots ① \\ -2x+y+3=0 & \dots ② \end{cases}$$

من المعادلة ② نستنتج أن: $y=\boxed{2x-3} \dots ③$

بتعويض y في المعادلة ① نجد:

$$5x-4(2x-3)+6=0$$
$$\Longrightarrow 5x-8x+12+6=0$$
$$\Longrightarrow -3x=-18$$
$$\Longrightarrow \boxed{x=6}$$

نعوض x في المعادلة ③ نجد:

$$y=2(6)-3 \Longrightarrow \boxed{y=9}$$

و منه الثنائية $(6;9)$ هي حل للجملة و النقطة $(6;9)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين.

III]. طريقة المحدد (Det) [الوضع النسبي لمستقيمين]

* تعتبر طريقة المحدد طريقة كاملة لمعرفة الوضع النسبي لمستقيمين أي:

- متوازيان منفصلان
- متوازيان متطابقان
- متقاطعان مع إيجاد نقطة التقاطع

Prof Mustapha
KHALDI

الطريقة:

(D) مستقيم معادلته $ax+by=c$

(D') مستقيم معادلته $a'x+b'y=c'$

$$(*)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

لمعرفة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (D') نستعمل المحدد det

$$\boxed{det=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b}$$

إذا كان	$det=0$	$det\neq 0$
فإن	الجملة $(*)$ تقبل ما لا نهاية من الحلول أو لا تقبل حلول	الجملة $(*)$ تقبل حل وحيد
التفسير الهندسي	(D) و (D') إما متوازيان متطابقان أو متوازيان غير متطابقان	(D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة

✳ في حالة $det\neq 0$ إحداثيي نقطة التقاطع هي:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{det} \quad ; \quad x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{det}$$

✓ ملاحظة:

(D') ينطبق على (D) $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$

$(D')//(D)$ و منفصلين $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$