الدوال المرجعية

***الدالة مربع :**

أصحيح أم خطأ:

حل التمرين (01):

- إذا كان $x > 2$ فإن: $x^2 > 4$ **صحيــح.**
- إذا كان $x^2 > 4$ فإن: $x > 2$ **خطــأ.**
- إذا كان $x \le -2$ فإن: $x^2 \le 4$ **خطــأ.**
- إذا كان $x \in [-7 ; -5]$ فإن: $x^2 \ge 9$ **صحيــح.**
- إذا كان $x^2 \le 9$ فإن: $-3 \le x \le 3$ **صحيــح.**
- إذا كان $-5 \le x \le -3$ فإن: $9 \le x^2 \le 25$ **صحيــح.**
- إذا كان $4 \le x^2 \le 36$ فإن: $2 \le x \le 6$ **خطــأ.**
- إذا كان $x \in [-2 ; 3]$ فإن: $x^2 \in [4 ; 9]$ **خطــأ.**

حل التمرين (02):

- مربع كل عدد حقيقي x يكون أكبر من x. **خطــأ.**
- أكبر قيمة لدالة مربع على $[a ; b]$ هي: a^2 أو b^2. **صحيــح.**

حل التمرين (03):

أ/ الدالة مربع متناقصة على $]-3 ; -1[$ **صحيــح.**

ب/ الدالة مربع متزايدة على $\mathbb{R}$. **خطــأ.**

حل التمرين (04):

- إذا كان $\alpha < 0 < B$ فإن: $\alpha^2 < B^2$ **خطــأ.**
- إذا كان $\alpha < B$ فإن: $\alpha^2 < B^2$ **خطــأ.**

- إذا كان $\alpha > B$ فإن: $\alpha^2 > B^2$ خطـأ.

✔ **صـور وسوابـق:**

حـل التمرين (05): إتمـام الجدول:

x	3	-2	$2\sqrt{3}$	$-\frac{1}{5}$	2×10^{-2}	$0,3$
x^2	9	4	12	$\frac{1}{25}$	4×10^{-4}	$0,09$
$-x^2$	-9	-4	-12	$-\frac{1}{25}$	-4×10^{-4}	$-0,09$
$(-x)^2$	9	4	12	$\frac{1}{25}$	4×10^{-4}	$0,09$

حـل التمرين (06):

أ/ **تعييـن صـور القيـم بالدالـة f :**

$$f\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=2-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

$$f(-2)=4 \quad ; \quad f(-4)=16$$

ب/ **مقارنة بين صورة $2-\sqrt{3}$ وصورة $\sqrt{3}-2$:**

$$f\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}-2\right)=\left(\sqrt{3}-2\right)^2=3-4\sqrt{3}+4=7-4\sqrt{3}$$

وعليه: $f\left(2-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}-2\right)$

ج/ لا توجد سوابق للعدد **(2−)** **لأن:** $x^2 \geq 0$ مهما يكن x.

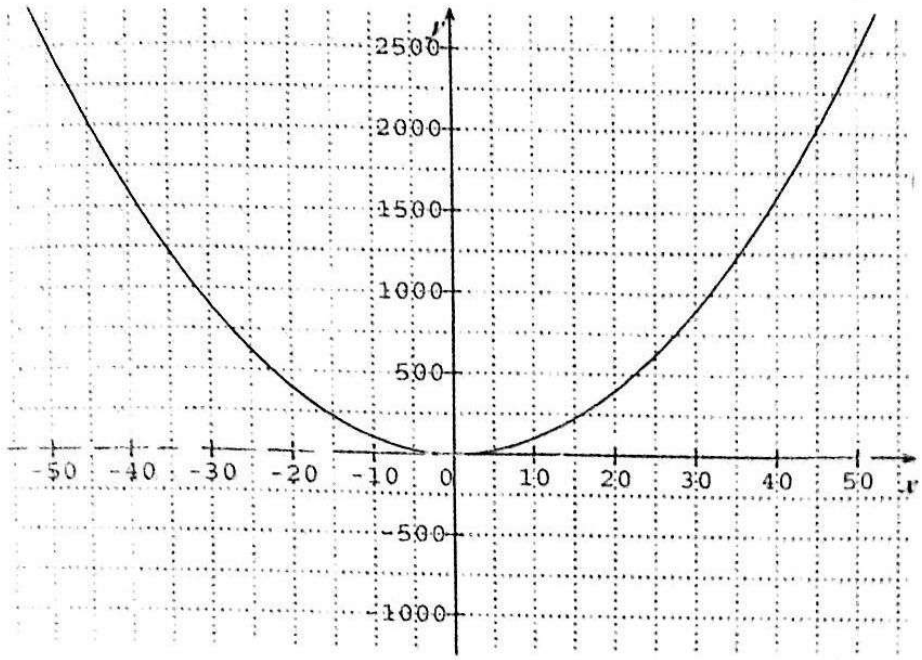
سوابق $5-2\sqrt{6}$ بالدالة f هما: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ أو $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ لأن:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+3=5-2\sqrt{6}$$

حل التمرين (07):

(C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[-50;50]$ بالعبارة: $f(x)=x^2$.

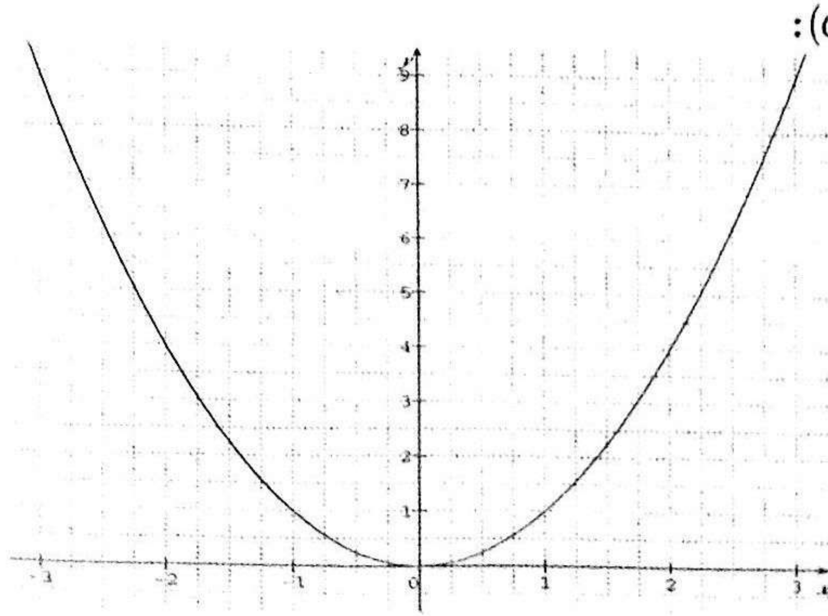
* **إنشاء (C) في معلم متعامد (نمثل 10 بـ: $1cm$ في محور الفواصل ونمثل 500 بـ: $1cm$ في محور التراتيب).**



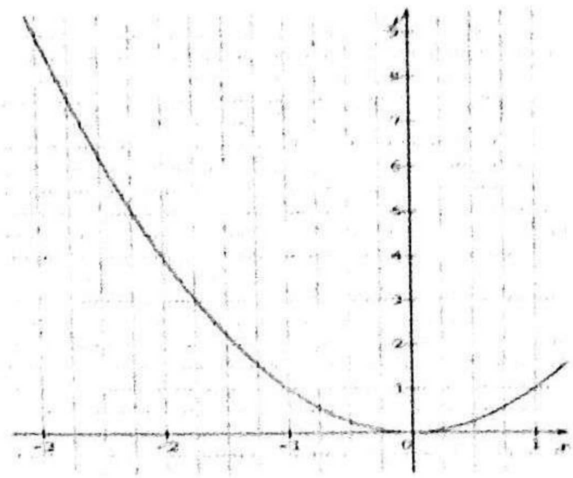
حل التمرين (08):

أ/ (C) هو التمثيل البياني للدالة f هي الدالة المعرفة على $I=[-3;3]$ بـ: $f(x)=x^2$

* **إنشاء (C):**



ب/ في حالــة $x \in [-3\,;\,1]$:

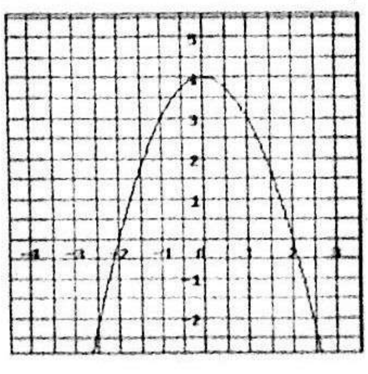


(C) يقبل محور تناظر وهو محور التراتيب.

في هذه الحالة المنحنى (C) لا يقبل مركز تناظر ولا محور تناظر.

حل التمرين (09):

• إليك التمثيل البياني لدالة f من الشكل $x \to ax^2 + b$.



باستعمال الشكل لدينا: $f(1)=3$; $f(0)=4$

$f(-2)=0$

ب/ جدول تغيرات الدالــة f :

قيــم x	$-2{,}5$	0	$2{,}5$
تغيرات f	-2 ↗	4	↘ -2

ج/ إشارة وعدد حلول المعادلة $f(x)=1$:

عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ هو اثنان أحدهما موجب والآخر سالب.

د/ المعادلة $f(x)=5$ لا تقبل حلول لأن القيمة الحدية العظمى للدالة f هي 4.

استعمال اتجاه التغير:

حل التمرين (10):

* **المقارنة في كل حالة:**

$$7{,}003^2 > 7{,}002^2$$

$$(-2{,}01)^2 > (-1{,}99)^2$$

$$(-7{,}4629)^2 < (-7{,}463)^2$$

$$-47^2 > -43{,}14^2$$

حل التمرين (11):

* **المقارنـــة في كـــل حالـــة:**

أ/ بما أن: $x \geq 0$ فإن: $x-3 < x+2$ وبما أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وبالتالي: $(x+2)^2 > (x-3)^2$.

ب/ بما أن: $x \geq 1$ فان: $1-x < 2-x$ وبما أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ وبالتالي: $(1-x)^2 > (2-x)^2$.

✔ التمثيل البياني:

حل التمرين (12):

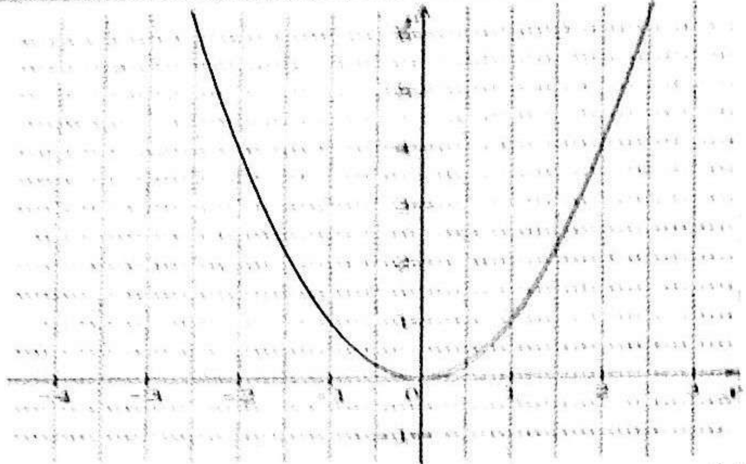
* **إيجاد حصر للعدد الحقيقي x^2 في كل حالة:**

$$0 \leq x^2 \leq 9 \; ; \; x \in [-3 \; ; \; 1[$$

$$0 \leq x^2 < 0{,}09 \; ; \; x \in [-0{,}3 \; ; \; 0{,}1[$$

$$0 \leq x^2 \leq 0{,}04 \; ; \; x \in [-0{,}2 \; ; \; 0{,}1]$$

$$4 \leq x^2 < 16 \; ; \; x \in]-4 \; ; \; -2[$$



حل التمرين (13):

f الدالــة المعرفــة على $[-10\ ;\ 7]$ بـ: $f(x)=x^2-10$

ليكن x_1 و x_2 عددان من $[-10\ ;\ 0]$ حيث: $x_1<x_2$.

بما أن: $x_1<x_2<0$ وبما أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ وبالتالي:

$x_1^2>x_2^2$ بإضافة (-10) نجد $x_1^2-10>x_2^2-10$

أي: $f(x_1)>f(x_2)$ وعليه: الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-10\ ;\ 0]$.

من جهة أخرى: ليكن x_1 و x_2 عددان من $[0\ ;\ 7]$ حيث: $x_1<x_2$.

بما أن: $0<x_1<x_2$ وبما أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ وبالتالي:

$x_1^2<x_2^2$ بإضافة (-10) نجد: $x_1^2-10<x_2^2-10$

أي: $f(x_1)<f(x_2)$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\ ;\ 7]$.

لدينا: $f(-10)=(-10)^2-10=100-10=90$

$f(0)=(0)^2-10=-10$

$f(7)=(7)^2-10=49-10=39$

* **جدول تغيرات الدالــة f:**

قيــم x	-10		0		7
تغيرات f	90	$\searrow$	-10	$\nearrow$	39

القيمة الحدية الصغرى للدالة f الدالة على: $[-10 \ ; \ 7]$ هي: (-10).

حل التمرين (14):

*** تعيين اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية:**

أ/ f معرفة على $[2 \ ; \ 3]$ بالعبارة: $f(x)=4(x-3)^2+1$

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من المجال $[2 \ ; \ 3]$ حيث: $x_1 < x_2 < 3$

نضيف (-3) فنجد: $x_1-3 < x_2-3 < 0$

إذن: $(x_1-3)^2 > (x_2-3)^2$ لأن الدالة مربع متناقصة على $]-\infty \ ; \ 0]$

وعليــه: $4(x_1-3)^2 > 4(x_2-3)^2$

أي: $4(x_1-3)^2+1 > 4(x_2-3)^2+1$

أي: $f(x_1) > f(x_2)$

وعليه الدالة f متناقصة على المجال $[2 \ ; \ 3]$.

ب/ g دالة معرفة على $]-\infty \ ; \ -1[$ بــ: $g(x)=-2(x+1)^2+7$

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من المجال $]-\infty \ ; \ -1[$ حيث:

$x_1 < x_2 < -1$ نضيف $(+1)$ فنجد: $x_1+1 < x_2+1 < 0$

بالتربيع نجد: $(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$ لأن الدالة مربع متناقصة على $]-\infty \ ; \ 0]$

$-2(x_1+1)^2 < -2(x_2+1)^2$ (بضرب في العدد -2)

أي: $-2(x_1+1)^2+7 < -2(x_2+1)^2+7$ $f(x_1) < f(x_2)$

وعليه: الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty \ ; \ -1[$.

ج/ الدالة h المعرفة على $]-\infty \ ; \ -1]$ بــ: $h(x)=3(x+1)^2-7$

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من المجال $]-\infty \ ; \ -1]$ حيث:

$x_1 < x_2 \leq -1$ بإضافة 1 نجد: $x_1+1 < x_2+1 \leq 0$

وعليه: $(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$ لأن الدالة مربع متناقصة على المجال $]-\infty \ ; \ 0]$

وعليه: $3(x_1+1)^2 > 3(x_2+1)^2$

$3(x_1+1)^2-7 > 3(x_2+1)^2-7$

أي: $h(x_1) > h(x_2)$ وعليه الدالة h متناقصة على المجال $]-\infty \ ; \ -1]$.

✔ **القيم الحدية:**

☜ **حل التمرين (15):**

لدينـــا: $f(4)=(4-4)^2+5=5$

وعليــه: $f(x)-f(4)=(x-4)^2+5-5=(x-4)^2\geq 0$

من أجــل كل عـــدد حقيقي x لدينـــا: $f(x)-f(4)\geq 0$ أي: $f(x)\geq 5$.

وعليــه: أصغـــر قيمـــة ممكنـــة للدالـــة f هي 5.

☜ **حل التمرين (16):**

* تحليــل $f(x)+15$:

✔ **ملاحظة:** $f(x)=9x^2-12x-11$

لدينـــا:

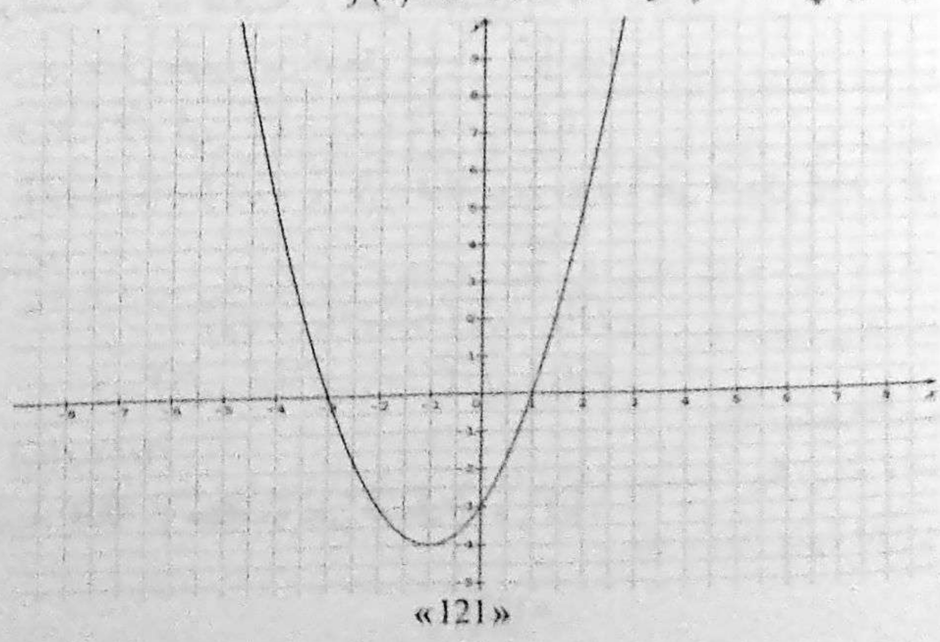
$$f(x)+15=9x^2-12x-11+15$$
$$f(x)+15=9x^2-12x+4$$
$$f(x)=(3x)^2-2(3x)(2)+(2)^2=(3x-2)^2$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(3x-2)^2\geq 0$ فإن: $f(x)+15\geq 0$

أي: $f(x)\geq -15$ وعليه: أصغر قيمة ممكنة للدالة f هي: (15).

☜ **حل التمرين (17):**

* التمثيل البياني للدالة f حيث: $f(x)=x^2+2x-3$



نلاحظ على الشاشة أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها (-4) أي: $f(x)\geq -4$

*** الإثبات:**

لدينـــا: $f(x)+4=x^2+2x-3+4=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0$

وعليه: $f(x)+4\geq 0$ أي: $f(x)\geq -4$

حل التمرين (18):

دراسة تغيرات الدالة f حيث: $f(x)=-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)^2-2$.

*** دراسة تغيرات الدالة f على المجال $\left]-\infty\,;\,\sqrt{2}\right]$:**

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من المجال $\left]-\infty\,;\,\sqrt{2}\right]$ حيث:

$x_1<x_2<\sqrt{2}$ وعليه: $x_1-\sqrt{2}<x_2-\sqrt{2}<0$

أي: $\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2>\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2$ لأن: الدالة مربع متناقصة على المجال $\left]-\infty\,;\,0\right]$.

وعليه:

$$-\sqrt{2}\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2<-\sqrt{2}\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2$$
$$-\sqrt{2}\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2-2<-\sqrt{2}\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2-2$$

أي: $f(x_1)<f(x_2)$

وعليه الدالة f متزايدة على المجال $\left]-\infty\,;\,\sqrt{2}\right]$.

*** دراســـة تغيرات الدالـــة f على المجـــال $\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$:**

x_1 و x_2 عددان حقيقيان من المجال $\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$ حيث:

$\sqrt{2}<x_1<x_2$ أي: $0<x_1-\sqrt{2}<x_2-\sqrt{2}$

أي: $\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2<\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2$ لأن: الدالة مربع متزايدة على المجال $\left[0\,;\,+\infty\right[$

وعليـــه:

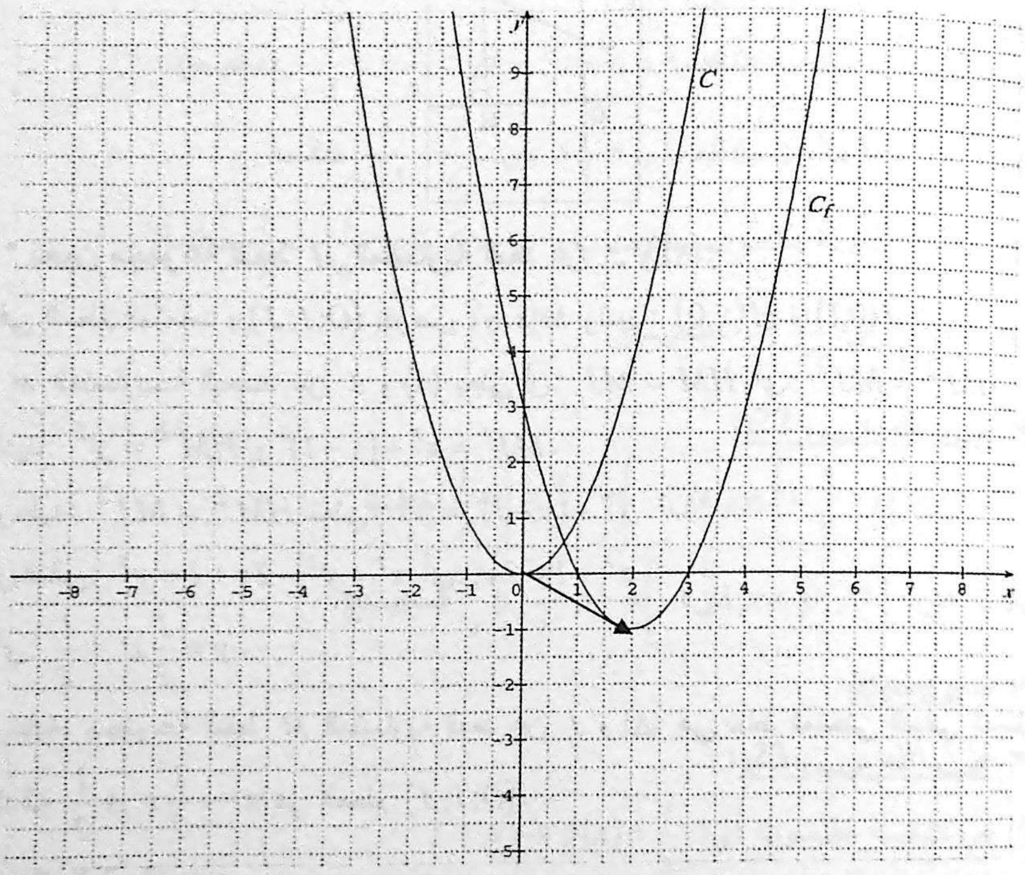
$$-\sqrt{2}\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2>-\sqrt{2}\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2$$
$$-\sqrt{2}\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2-2>-\sqrt{2}\left(x_2-\sqrt{2}\right)^2-2$$

أي: $f(x_1)>f(x_2)$

وعليـــه: الدالة f متناقصة على المجال $\left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$.

حل التمرين (19):

أ/ إنشاء المنحنى (C) الممثل للدالة مربـع:



ب/ يمكن إنشاء المنحنى (E) إنطلاقا من (C) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{V}(2\ ;\ -1)$

لأن: النقطـــة $M(x\ ,\ y)$ تنتمي إلى (E) إذا وفقط إذا كان: $y=(x-2)^2-1$

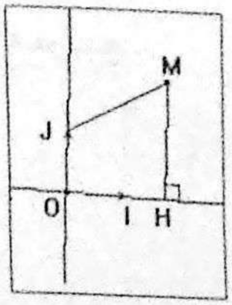
أي: $y+1=(x-2)^2$.

النقطة $M(x-2\ ;\ y+1)$ تنتمي إلى القطع المكافئ (C) إذن تمر من (C) إلى (E) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}(2\ ;\ -1)$.

حل التمرين (20):

J نقطة لا تنتمي إلى المستقيم (Δ) و O هي مسقطها العمودي على (Δ). I هي: نقطة من (Δ) حيث: $OI=OJ$.

نعتبر في المعلم المتعامد و $(O;I,J)$ نقطة متغيرة $M(x,y)$.



*** تعيين مجموعة النقط M المتساوية البعد عن J و (Δ):**

في المعلم المتعامد و $(O;I,J)$ نفرض $M(x;y)$ ولدينا: $H(x;0)$ و $J(0;1)$.

M المتساوية البعد عن J و (Δ) يعني أن: $HM = MJ$ أي: $HM^2 = MJ^2$

لدينا: $HM^2 = y^2$ و $MJ^2 = x^2 + (y-1)^2$.

وعليه: $HM^2 = MJ^2$ تعني: $x^2 + (y-1)^2 = y^2$

وبالتالي: $x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2$ أي: $x^2 + 1 = 2y$

أي: $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

وعليه: مجموعة النقط M المتساوية البعد عن J و (Δ) هي نقاط المنحنى البياني الممثل

للدالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ في المعلم $(O;I,J)$.

✔ الدالة مقلوب:

صحيح أم خطأ:

حل التمرين (21):

1) مقلوب كل عدد موجب هو عدد سالب. **خطأ.**

2) مقلوب عدد حقيقي غير معدوم وأصغر من 7 يكون أكبر من 7. **خطأ.**

3) مقلوب $7-4\sqrt{3}$ أكبر من $7-4\sqrt{3}$. **صحيح.**

4) إذا كان: $x > 5$ فإن: $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$. **صحيح.**

5) a و b عددان غير معدومان.

6) إذا كان: $a < b$ فإن: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. **خطــأ.**

7) إذا كان: $x < -5$ فإن: $-\frac{1}{x} > -\frac{1}{5}$. **صحيــح.**

8) بما أن: الدالة مقلوب متناقصة و $-6 < -5$ فإن: $-\frac{1}{6} > -\frac{1}{5}$ **صحيــح.**

9) بما أن: الدالة مقلوب متناقصة و $6 > 5$ فإن: $\frac{1}{6} < \frac{1}{-5}$ **خطــأ.**

10) بما أن: الدالــة مقلــوب متناقصــة و $-6 < 5$ فإن: $-\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ **خطــأ.**

11) $\frac{2}{11} \leq \frac{1}{x}$ أي: $x \geq \frac{11}{2}$ **صحيــح.**

حل التمرين (22):

أ/ إذا كان: $x \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right[$ فإن: $\frac{1}{x} \in \left[-\frac{4}{3}, 0\right[$ **خطــأ.**

ب/ إذا كان: $x \in]0\ ; 8]$ فإن: $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{8}, +\infty\right[$ **صحيــح.**

✔ **صور وسوابق:**

حل التمرين (23):

f هي الدالــة مقلــوب أي: $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

أ/ حســاب صــور الأعــداد:

$$f(-1) = -1 \quad ; \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -3$$

$$f(10^{-2}) = \frac{1}{10^{-2}} = 10^{2}$$

$$f(10^{2}) = \frac{1}{10^{2}} = 10^{-2}$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{5}{7} \quad ; \quad f\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{5}{7}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \quad ; \quad f(-3) = -\frac{1}{3}$$

ب/ حساب السوابق في كل حالة:

لدينا: $f(x)=-3$ يعني أن: $x=-\frac{1}{3}$

- في حالة: $f(x)=5$ يعني أن: $x=\frac{1}{5}$.
- في حالة: $f(x)=10^{4}$ يعني أن: $x=10^{-4}$.
- في حالة: $f(x)=10^{-4}$ يعني أن: $x=10^{4}$.
- في حالة: $f(x)=\frac{5}{6}$ يعني أن: $x=\frac{6}{5}$.
- في حالة: $f(x)=-\frac{6}{5}$ يعني أن: $x=-\frac{6}{5}$.

حل التمرين (24):

x	$0,4$	10^{-1}	$\sqrt{2}-1$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	$2,5$	$0,1$	$\sqrt{2}+1$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

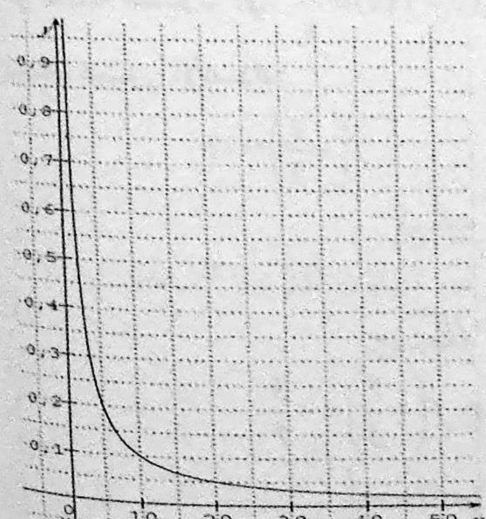
لا يمكن أن يشكل جدول القيم هذا الدالة مقلوب لأن: مقلوب 10^{-1} هو 10 وليس $0,1$.

التمثيل البياني:

حل التمرين (25):

* **تمثيل الدالة مقلوب على المجال** $]0\ ;\ 50]$:

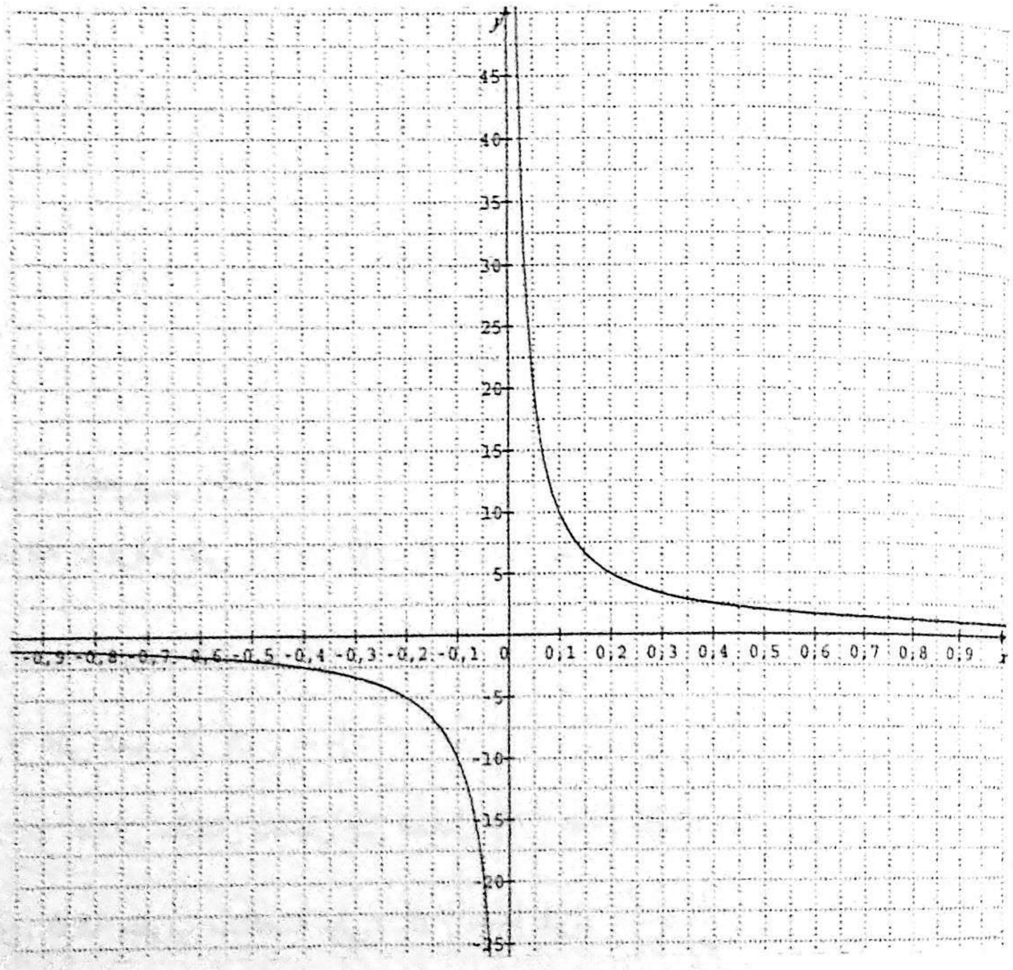
في معلم متعامد حيث: 10 تمثل $1cm$ على محور الفواصل و 1 يمثل $10cm$ على محور التراتيب.



حل التمرين (26):

* **تمثيل الدالة مقلوب على المجال** $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ 1[$:

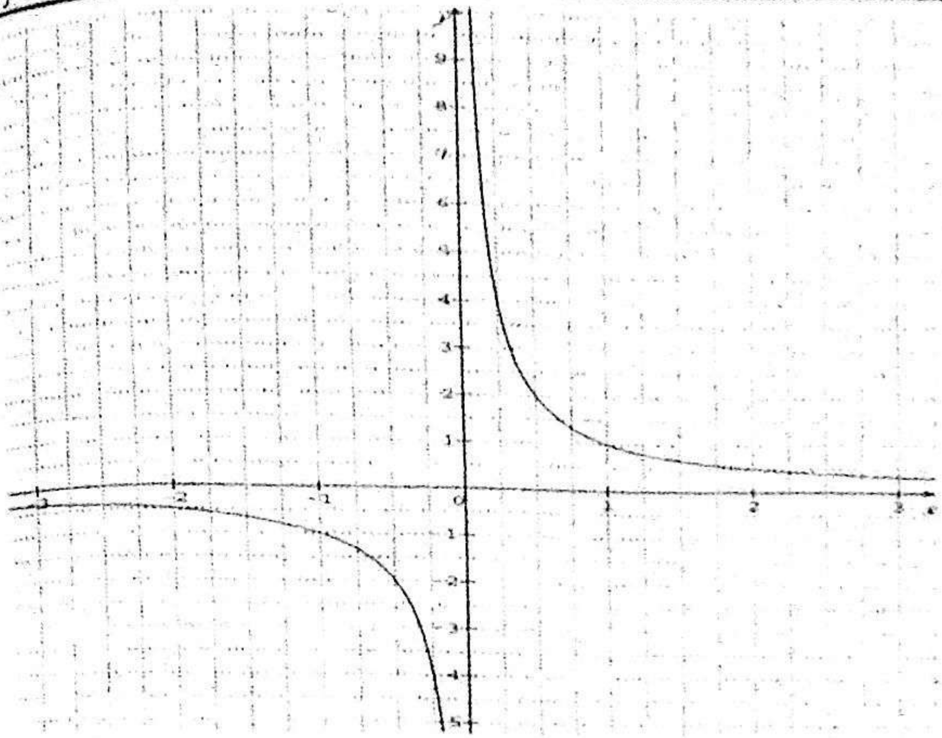
نأخذ $0,1cm$ لتمثيل 1 على محور الفواصل و $1cm$ لتمثيل 5 على محور التراتيب.



حل التمرين (27):

* **إنشاء المنحنى البياني** (C) **لدالة مقلوب من أجل** $x\in\left[-3\ ;\ -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\ ;\ 3\right]$

المنحنى (C) يقبل مركز تناظر وهو المبدأ O.



حل التمرين (28):

f الدالة المعرفة على $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2}{x}$

أ/ دراســة تغيرات الدالــة f :

* أولا على المجــال $]-\infty\ ;\ 0[$:

x_1 ، x_2 عددان حقيقيان ينتميان إلى المجال $]-\infty\ ;\ 0[$ حيث: $x_1 < x_2 < 0$

بما أن: الدالة مقلوب متناقصة على: $]-\infty\ ;\ 0[$ فإن: $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$

بضرب طرفي المتباينــة في 2 نجــد: $\dfrac{2}{x_1} > \dfrac{2}{x_2}$ أي: $f(x_1) > f(x_2)$

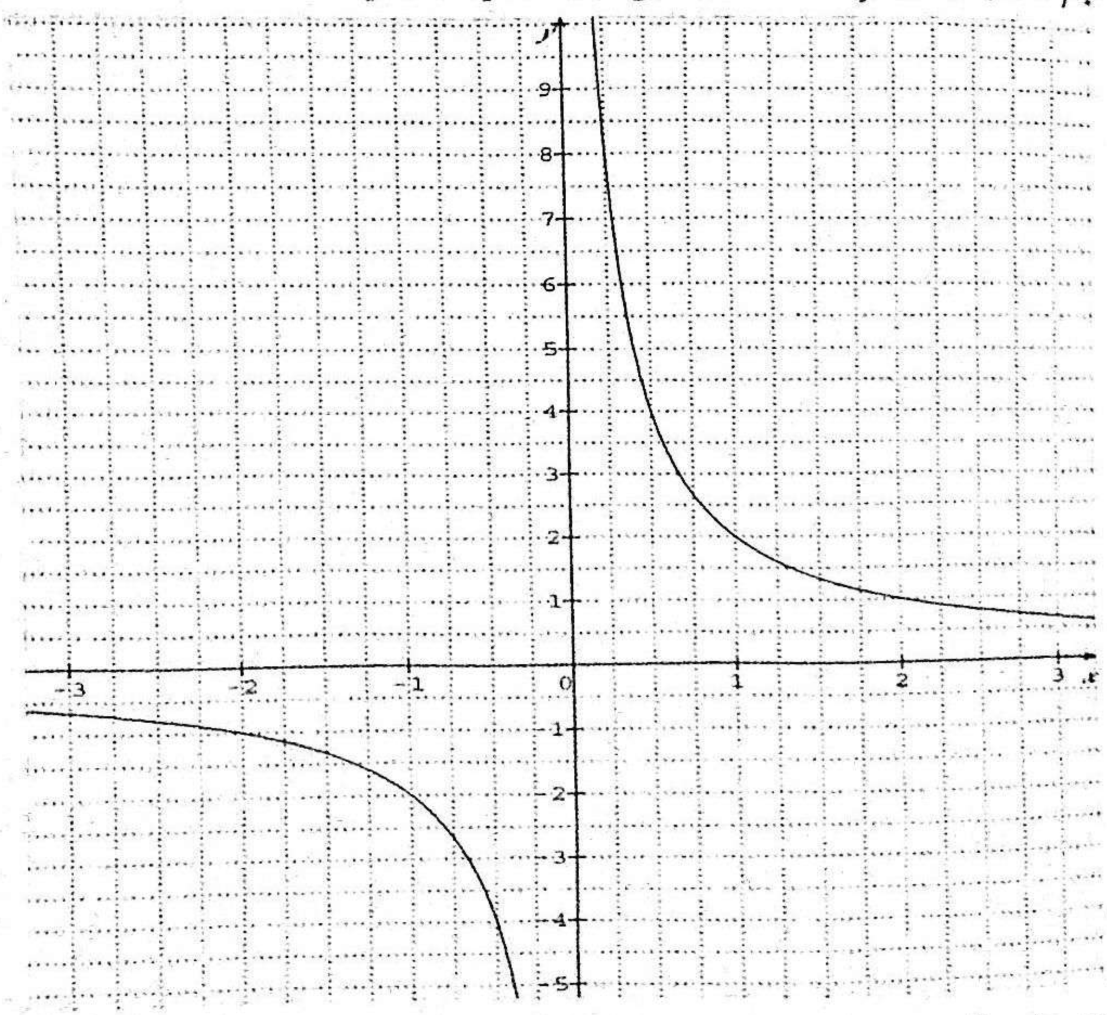
وعليــه: الدالــة f متناقصــة على المجــال $]-\infty\ ;\ 0[$.

بنفس الطريقــة نبرهن أن الدالــة f متناقصــة على المجــال $]0\ ;\ +\infty[$.

* جدول تغيرات الدالــة f :

قيم x	$-\infty$	0	$+\infty$
تغيرات f	↘	‖	↘

ب/ التمثيل البياني للدالة f على المجال $]-3\ ;\ 3[$:



حل التمرين (29):

f الدالة المعرفة على $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ بـ: $f(x)=-\dfrac{3}{x}$

أ/ دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$:

x_1 ، x_2 عددان حقيقيان ينتميان إلى المجال $]-\infty\ ;\ 0[$ حيث: $x_1 < x_2 < 0$

بما أن الدالة مقلوب متناقصة على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$ فإن: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

بضرب طرفي المتباينة في العدد (-3) نجد: $\frac{-3}{x_1} < -\frac{3}{x_2}$ أي: $f(x_1) < f(x_2)$

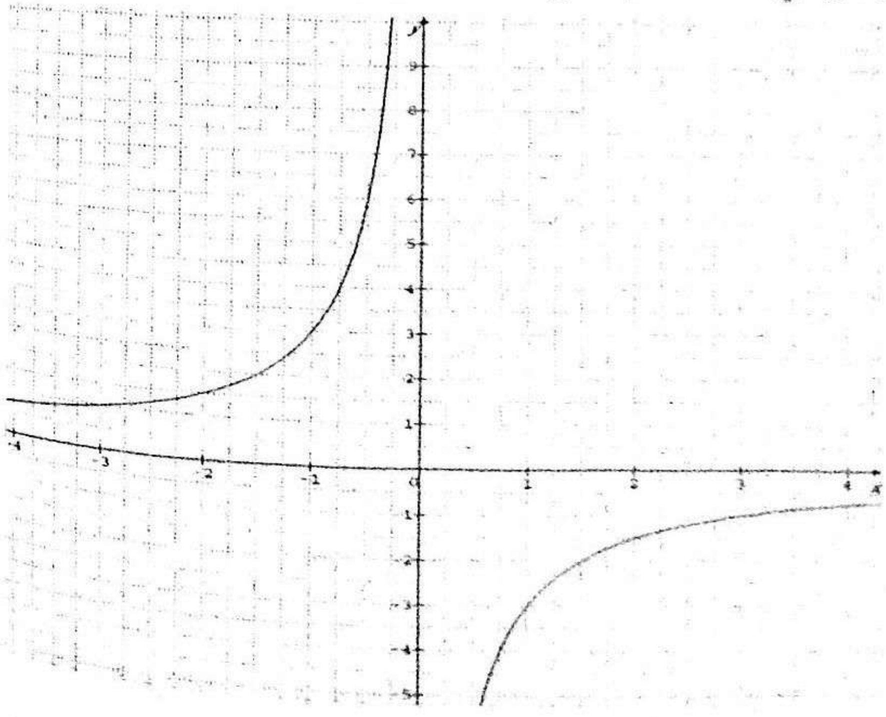
وعليه الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty\ ;\ 0[$.

بنفس الطريقة نبرهن أن الدالة f متزايدة على المجال $]0\ ;\ +\infty[$.

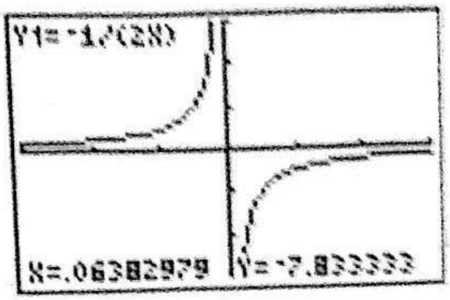
*** جدول تغيرات الدالـــة f :**

قيـــم x	$-\infty$	0	$+\infty$
تغيـــرات f	↗	‖	↗

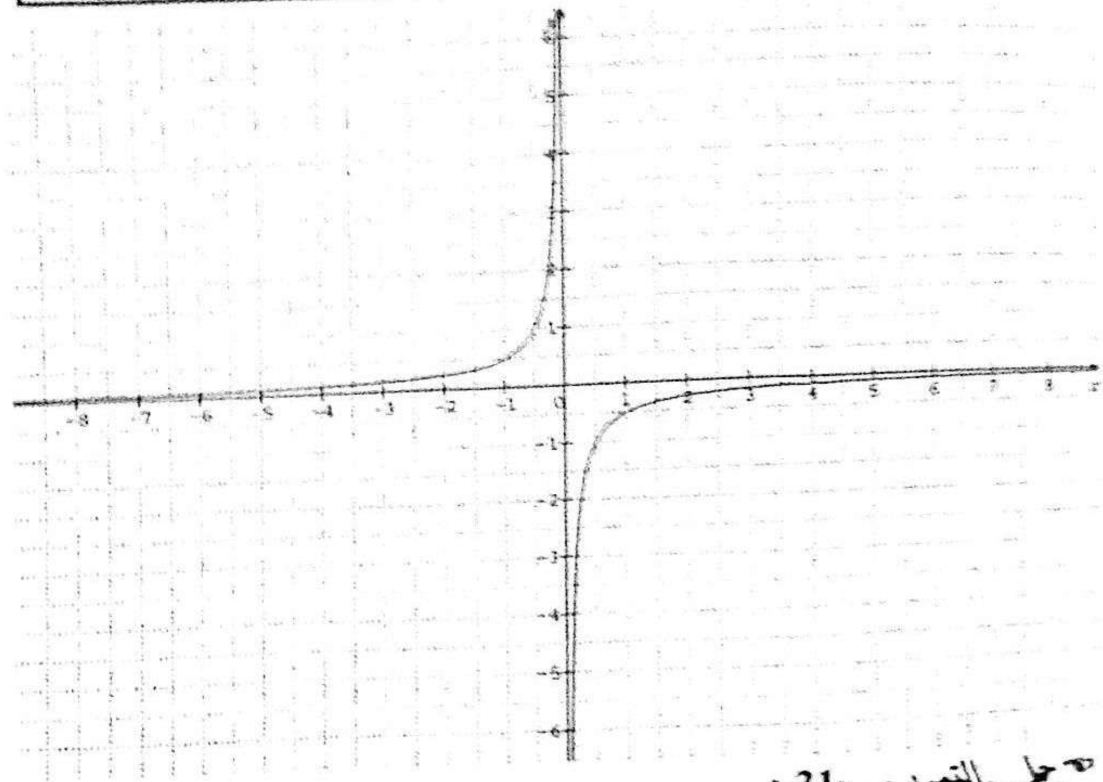
ب/ التمثيـــل البياني للدالـــة f على المجـــال $[-4\ ;\ 4]$:



حل التمرين (30):



• نستعمل الآلة الحاسبة البيانية لإنجاز مثيل الشكل المعطى.



حل التمرين (31):

f الدالة المعرفة على $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$

أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

• أولا على المجال $]-\infty\,;\,-2[$:

x_1 , x_2 عددان حقيقيان ينتميان إلى المجال $]-\infty\,;\,-2[$ حيث: $x_1<x_2<-2$ بإضافة 2 نجد: $x_1+2<x_2+2<0$ من جهة أخرى الدالة مقلوب متناقصة على المجال $]-\infty\,;\,0[$ وعليه: $\dfrac{1}{x_1+2}>\dfrac{1}{x_2+2}$.

بضرب طرفي المتباينة في 3 نجد: $\frac{3}{x_1+2} > \frac{3}{x_2+2}$ أي: $f(x_1) > f(x_2)$

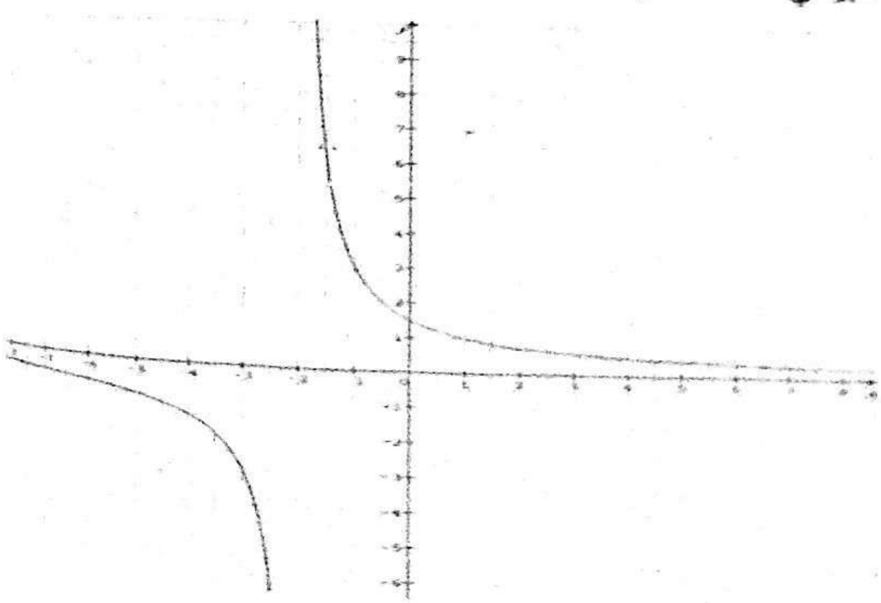
وعليه الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty\ ;\ -2[$.

بنفس الطريقة نبرهن أن الدالة f متناقصة على المجال $]-2\ ;\ +\infty[$.

* جدول تغيرات الدالـــة f:

قيـــم x	$-\infty$	-2	$+\infty$
تغيـــرات f	↘		↘

ب/ التمثيـــل البياني للدالـــة f:



حل التمرين 32:

f الدالـــة المعرفـــة على $]-\infty;-1[\cup]-1,+\infty[$ بـــ: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

أ/ برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \neq -1$ يكون: $f(x)=2-\frac{1}{x+1}$

لدينا: $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2x+2-1}{x+1}$

$$f(x)=\frac{2x+2}{x+1}-\frac{1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$$

ب/ دراســـة تغيرات الدالـــة f وتشكيــل جدول التغيرات:

* دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty ; -1[$:

x_2 , x_1 عددان حقيقيان ينتميان إلى المجال $]-\infty ; -1[$ حيث: $x_1 < x_2 < -1$

بإضافة 1 نجد: $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$.

من جهة أخرى الدالة مقلوب متناقصة على المجال $]-\infty ; 0[$ يعني: $\frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$

بالضرب في (-1) نجد: $\frac{-1}{x_1+1} < \frac{-1}{x_2+1}$ بإضافة العدد 2 نحصل على:

$2 - \frac{1}{x_1+1} < 2 - \frac{1}{x_2+1}$ أي: $f(x_1) < f(x_2)$

وعليه: الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty ; -1[$.

بنفس الطريقة نبرهن أن الدالة f متزايدة على المجال $]-1 ; +\infty[$.

* **جدول تغيرات الدالـــة f:**

قيـــم x	$-\infty$	-1	$+\infty$
تغيـــرات f	↗	||	↗

حل التمرين (33):

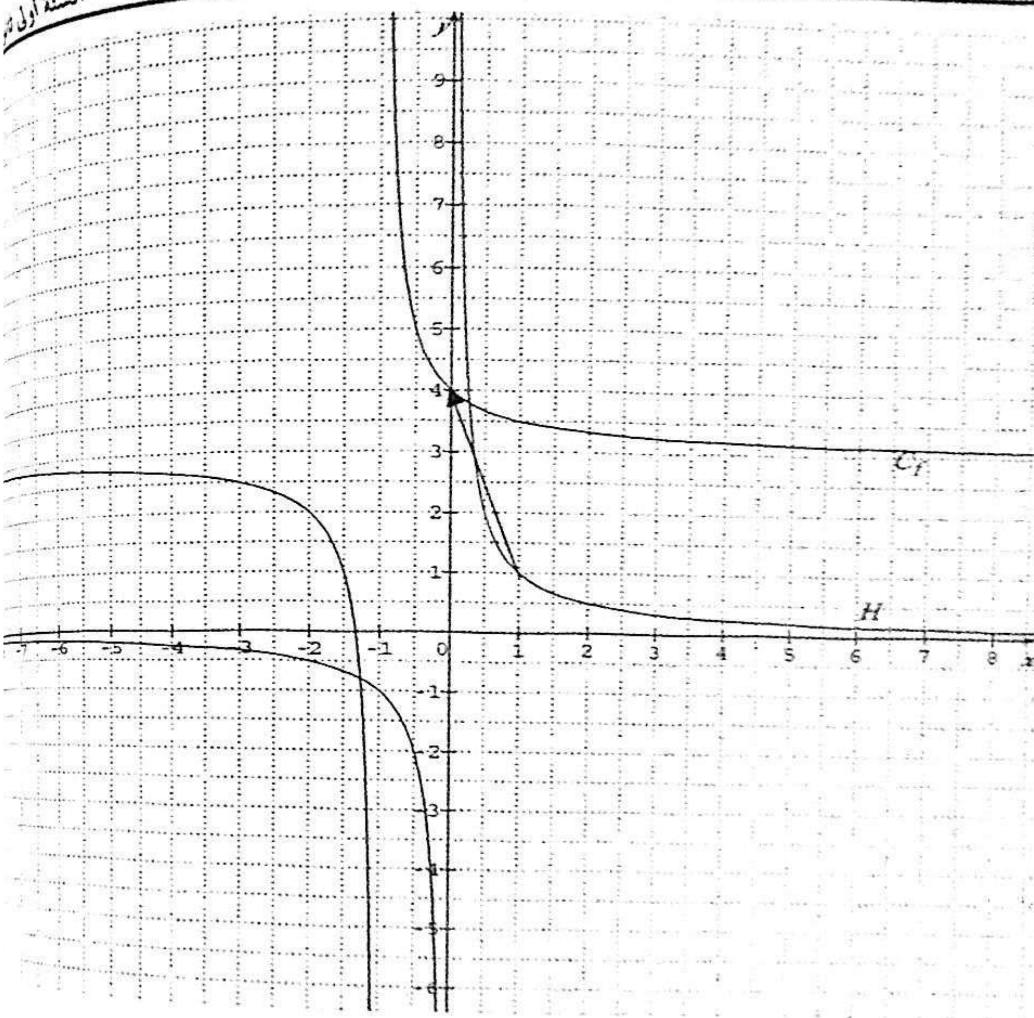
أ/ برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي f يختلف عن (-1) يكون: $f(x) = 3 + \frac{1}{x+1}$

لدينـــا: $f(x) = \frac{3x+4}{x+1} = \frac{3x+3+1}{x+1} = \frac{3x+3}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}$

ب/ بيان انه يمكن استنتاج (C) انطلاقا من (H) بالانسحاب يطلب تعيين شعاعه:

النقطـــة $M(x , y)$ نقطة من (C) فيكون: $x \neq -1$ و $y = f(x)$.

أي: $y = 3 + \frac{1}{x+1}$ معناه: $y - 3 = \frac{1}{x+1}$ وبالتالي: النقطـــة $M(x+1 ; y-3)$ تنتمي إلى القطع المكافئ (C) إذن تمر من (H) إلى (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{V}(-1;3)$.



✔ دالة الجذر التربيعي:

☜ حل التمرين (34):

صحيح أم خاطئ:

أ/ إذا كان x عددا حقيقيا حيث $x < 4$ فإن: $\sqrt{x} < 2$. **خطــأ.**

ب/ إذا كان $0 \leq x \leq 1$ فإن: $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$. **صحيح.**

ج/ من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا $x \geq \sqrt{x}$. **خطــأ.**

د/ إذا كان $x^2 \leq 25$ فإن: $x \leq 5$. **خطــأ.**

هـ/ إذا كان $x \in \left[\frac{1}{4};4\right]$ فإن: $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. **صحيح.**

حل التمرين (35):

أ/ x عدد سالب. العبارة $\sqrt{-x}$ ليس لها معنى. **خطـأ.**

ب/ من أجل كل عدد حقيقي لدينا: $x\sqrt{3}=\sqrt{3x^2}$. **خطـأ.**

حل التمرين (36):

* إتمام الجدول الآتي:

x	1	$(-5)^2$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\left(1-\sqrt{2}\right)$
$\sqrt{x}$	1	5	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$

حل التمرين (37):

$$f(x)=\sqrt{x}$$

أ/ حساب صوّر الأعداد:

$$(-a-b)^2 \ ، 6000^2+8000^2 ، \left(\frac{1}{2}-\pi\right)^2 ، 10^{-6}$$

$$f\left(10^{-6}\right)=\sqrt{10^{-6}}=\sqrt{\left(10^{-3}\right)^2}=10^{-3}$$

$$f\left(\left(\frac{1}{2}-\pi\right)^2\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\pi\right)^2}=\left|\frac{1}{2}-\pi\right|=\pi-\frac{1}{2}$$

$$f\left(6000^2+8000^2\right)=\sqrt{6000^2+8000^2}=\sqrt{\left(6\times10^3\right)^2+\left(8\times10^3\right)^2}=\sqrt{6^2\times10^6+8^2\times10^6}$$

$$=\sqrt{10^6\left(6^2+8^2\right)}=10^3\sqrt{36+64}=10^3\sqrt{100}$$

$$=10^3\times10=10^4=10000$$

$$f\left((-a-b)^2\right)=\sqrt{(-a-b)^2}=|-a-b|=|-(a+b)|=|a+b|$$

ب/ حساب سوابق الأعداد: 7 ، 10^{-6} ، 10^3 ، $(-1)^2$ ، $7-\sqrt{37}$.

نضـع: $f(x)=7$ أي: $\sqrt{x}=7$ وعليه: $x=49$.

ومنه: سابقة العدد 7 بالدالة f هو العدد 49.

نضـــع: $f(x)=10^{-6}$ أي: $\sqrt{x}=10^{-6}$ وعليه: $x=10^{-12}$.

ومنـــه: سابقة العدد 10^{-6} بالدالة f هو العدد 10^{-12}

نضـــع: $f(x)=10^{3}$ أي: $\sqrt{x}=10^{3}$ وعليه: $x=10^{6}$.

ومنه: سابقة العدد 10^{3} بالدالة f هو العدد 10^{6}.

نضع: $f(x)=(-1)^2$ أي: $\sqrt{x}=(-1)^2$ وبالتالي: $\sqrt{x}=1$ وعليه $x=1$.

ومنه: سابقة العدد $(-1)^2$ بالدالة f هو العدد 1.

نضع: $f(x)=7-\sqrt{37}$ أي: $\sqrt{x}=7-\sqrt{37}$ وبالتالي:

$$x=\left(7-\sqrt{37}\right)^2$$
$$x=49+37-14\sqrt{37}$$
$$x=86-14\sqrt{37}$$

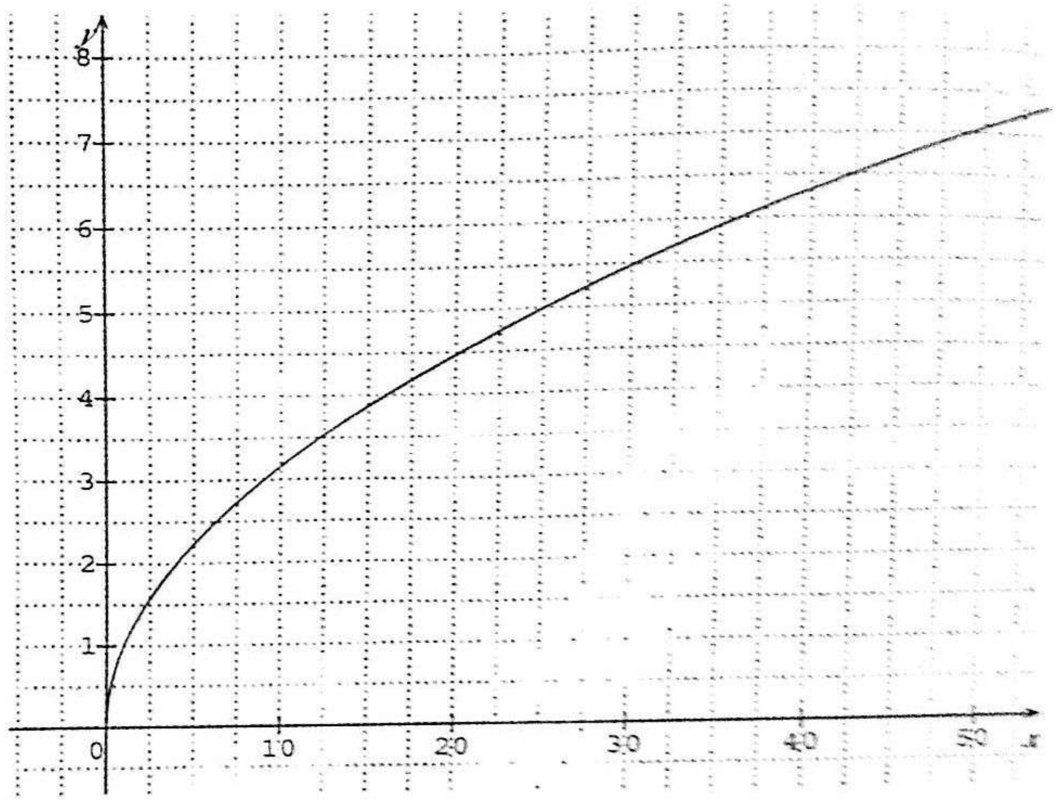
ومنه: سابقة العدد: $7-\sqrt{37}$ بالدالة f هو العدد: $86-14\sqrt{37}$.

حل التمرين (38):

تمثيل بيانيا على المجال $[0;50]$ دالة "الجذر التربيعي" في معلم متعامد حيث:
10 تمثل $2cm$ على محور الفواصل و 1 يمثل $1cm$ على محور التراتيب.

* جـــدول بعـــض القيـــم:

x	0	1	4	9	16	25	36	49
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7



حل التمرين (39):

f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\sqrt{2x}$.

دراســة تغيرات الدالة f :

من أجــل كل x_1, x_2 من $[0;+\infty[$ حيث: $x_1 < x_2$

وعليه $2x_1 < 2x_2$ أي $\sqrt{2x_1} < \sqrt{2x_2}$

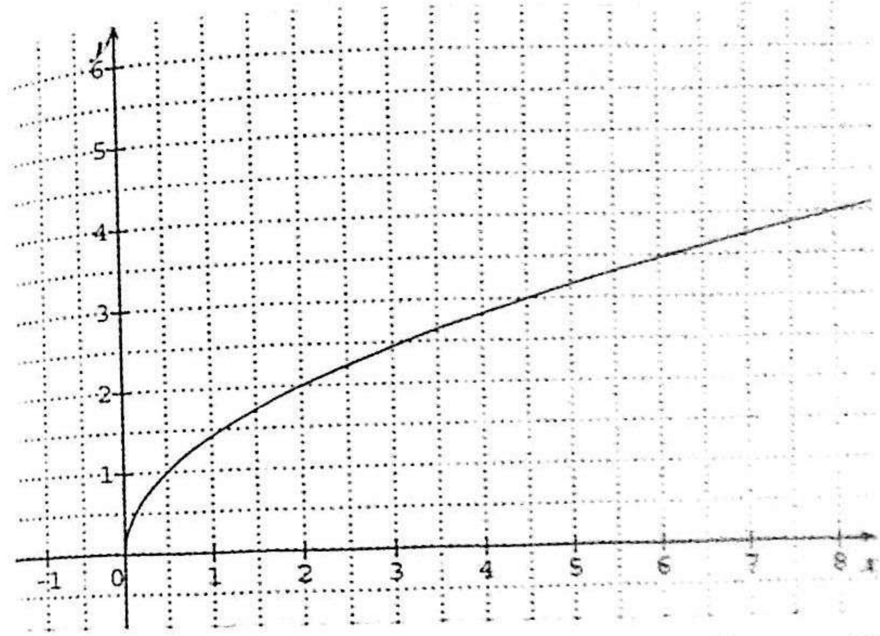
وبالتالي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه: f متزايــدة تمــاما على $[0;+\infty[$.

* جدول تغيــرات f :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

ب/ التمثيل البياني للدالة f على المجال $[0;8]$:



حل التمرين 40:

f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0]$ بـ: $f(x)=\sqrt{-2x}$.

أ/ دراسة تغيرات f:

من أجل كل x_1, x_2 من $]-\infty;0]$ حيث: $x_1 < x_2$

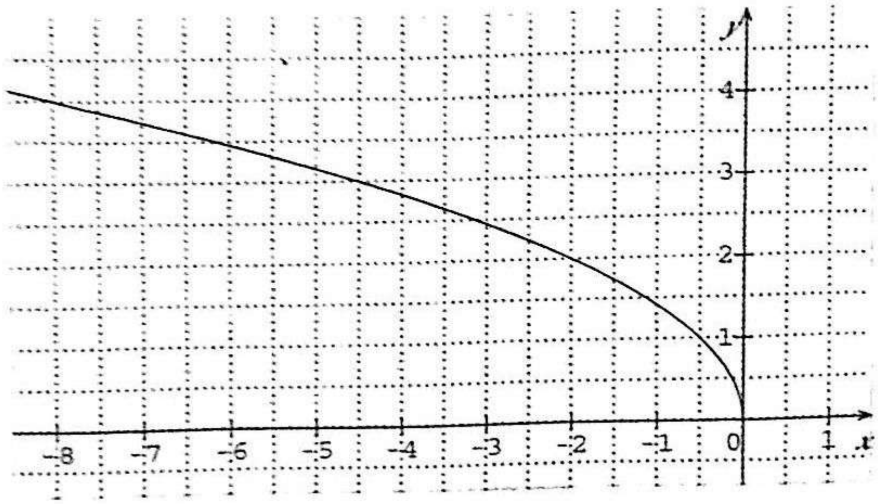
$$-x_1 > -x_2$$
$$-2x_1 > -2x_2$$
$$\sqrt{-2x_1} > \sqrt{-2x_2}$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

ومنه: f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

* جدول تغيرات f:

x	$-\infty$	0
$f(x)$	$\searrow$	0

ب/ التمثيـــل البياني للدالـــة f على المجـــال $[-8;0]$:



حل التمرين (41):

(C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $[-2;+\infty[$ بـــ: $f(x)=1+\sqrt{x+2}$

و (H) هو التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي.

أ/ دراســـة تغيرات f :

من أجــل كل x_1, x_2 من $[-2;+\infty[$ حيث: $x_1 < x_2$

أي: $x_1 + 2 < x_2 + 2$ وعليه: $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$

$$1+\sqrt{x_1+2} < 1+\sqrt{x_2+2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ومنه: f متزايدة تماما على $[-2;+\infty[$

*** جدول تغيـــرات f :**

x	-2 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	1 $\nearrow$

ب/ لدينـــا: $f(x)=1+\sqrt{x+2}$

$$y=1+\sqrt{x+2}$$

$$y-1=\sqrt{x+2}$$

بوضع: $\begin{cases} y' = y - 1 \\ x' = x + 2 \end{cases}$ فإن: $y = \sqrt{x}$

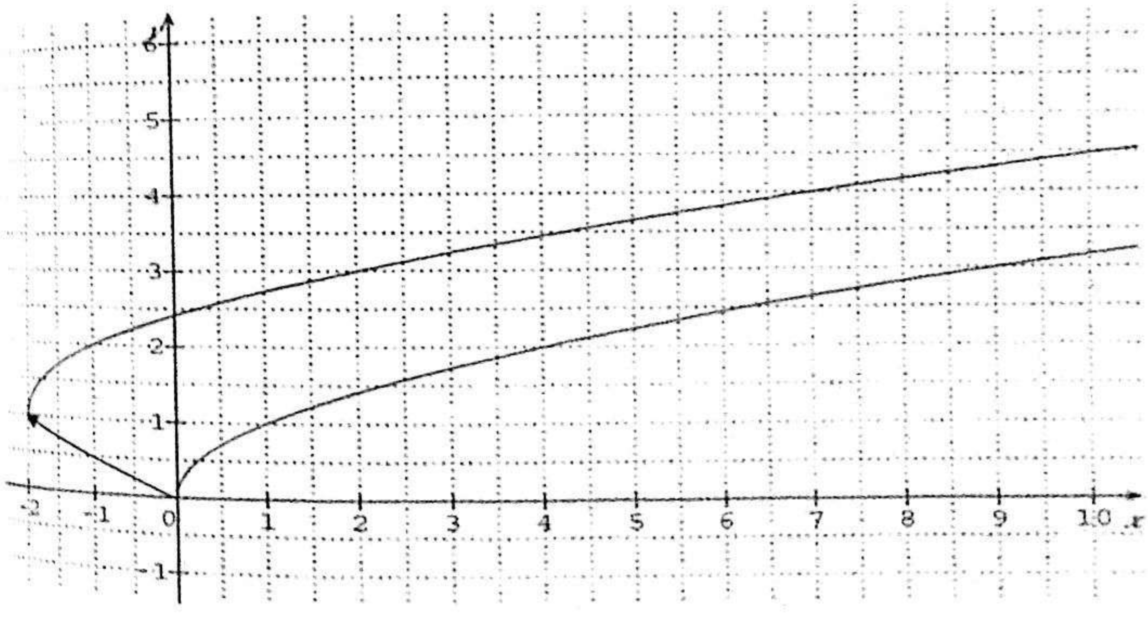
لتكن: $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ نقطة من منحنى الدالة جذر التربيعي (H).

فإن: $M\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ نقطة من المنحنى (H).

لتكن: $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ نقطة من المنحنى (C).

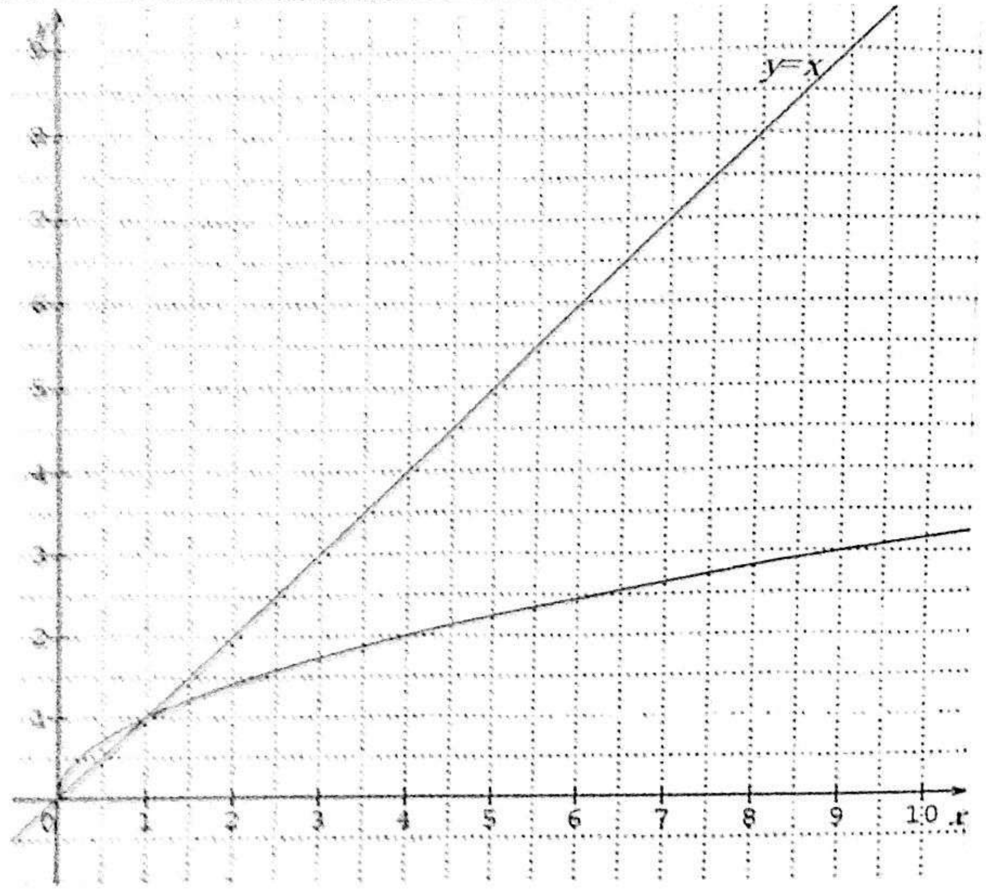
إذن: نمر من (H) إلى (C) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{V}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* إنشـــاء (C):



حل التمرين (42):

أ/ تمثيل على المجال $]0,+\infty[$ الدالتين: $x \xrightarrow{f} x$ و $x \xrightarrow{g} \sqrt{x}$



ب/ التخميـــن:

- (C_f) يقع فوق (C_g) لمـــا $x \in [1;+\infty[$ ومنـــه: $x \geq \sqrt{x}$.
- (C_f) يقع تحت (C_g) لمـــا $x \in [0;1]$ ومنـــه: $x \geq \sqrt{x}$.

*** البرهـــان:**

من أجـــل $x \in [0;1]$: $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)$

وبمـــا أن: $0 \leq x \leq 1$ فإن: $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ ومنه: $\sqrt{x} - 1 \leq 0$

ومنه: $x - \sqrt{x} \leq 0$ ومنه: $x \leq \sqrt{x}$.

من أجل: $x \in [1;+\infty[$ $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right)$.

$x \geq 1$

وبمـــا أن: $\sqrt{x} \geq 1$

$\sqrt{x} - 1 \geq 0$

ومنه: $0 \geq x - \sqrt{x}$ ومنه: $x \geq \sqrt{x}$.

الدالتان جيب تمام وجيب:

أصحيح أم خطأ:

حل التمرين (43):

لا يوجد أي عدد حقيقي x حيث: $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **(صحيح)** لأن: $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ ونعلم أن

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

حل التمرين (44):

إذا كان $a < b$ فإن: $\cos a < \cos b$ و $\sin a < \sin b$ **(خطأ)**.

حل التمرين (45):

- $\cos\frac{\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{7}$ **(صحيح)**.
- $\sin\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{7}$ **(خطأ)**.

حل التمرين (46):

a و b **عنصران من المجال** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

أ/ إذا كان: $a < b$ فإن: $\cos\frac{1}{b} < \cos\frac{1}{a}$ **خطأ**.

ب/ إذا كان: $a < b$ فإن: $\sin\frac{1}{b} > \sin\frac{1}{a}$ **خطأ**.

حل التمرين (47):

بما أن A و B نقطتان من دائرة مركزها O ونصف قطرها $1cm$ و $\widehat{AOB} = 10°$ فإن طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو $10cm$. **(خطأ)**.

حل التمرين (48):

* تعيين $A\hat{O}B$ بالراديان:

لدينا طول القوس $\hat{AB}$ هو $I = 2,5cm$ ونعلم أن: $I = a \times r$ حيث a قيسا بالراديان للزاوية $A\hat{O}B$ و r نصف قطر الدائرة، ومنه: $a \times 5 = 2,5$ يكافئ: $a = \frac{2,5}{5}$ معناه $a = 0,5$.

وعليه: $A\hat{O}B = 0,5rad$

• تعيين $A\hat{O}B$ بالدرجة:

الراديان	π	0,5
الدرجة	180	x

باستعمال جدول التناسبية نجد: $x = \frac{180}{\pi} \times 0,5$ أي: $x = \frac{90}{\pi}$ وعليه: $A\hat{O}B$ بالدرجة هي: $\frac{90}{\pi}$.

حل التمرين (49):

- طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قيسها $\frac{\pi}{4} rad$ هو: $I_1 = \frac{\pi}{3} \times 10cm$.
- طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قيسها $\frac{\pi}{4} rad$ هو: $I_2 = \frac{\pi}{4} \times 10 = \frac{5\pi}{2} cm$.
- طول القوس التي تحصرها الزاورية المركزية التي قيسها $\frac{\pi}{4} rad$ هو: $I_3 = \frac{3\pi}{4} \times 10 = \frac{15\pi}{2} cm$

لحساب أطوال الأقواس التي تحصرها الزوايا المركزية التي أقياسها $90°$, $75°$, $120°$ نحول الأقياس من الدرجة إلى الراديان.

الراديان	π	x	y	z
الدرجة	180	90	75	120

باستعمال جدول التناسبية نجد: $x = \frac{\pi}{2}$ ، $y = \frac{5\pi}{12}$ ، $z = \frac{2\pi}{3}$ ومنه:

- طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قيسها $90°$ أي: $\frac{\pi}{2} rad$ م

$$.I_4 = \frac{\pi}{2} \times 10 = 5\pi cm$$

- طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قيسها $75°$ أي: $\frac{5\pi}{12} rad$ م

$$.I_5 = \frac{\pi}{2} \times 10 = \frac{25\pi}{6} cm$$

- طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قيسها $120°$ أي $\frac{2\pi}{3} rad$ م

$$.I_6 = \frac{2\pi}{3} \times 10 = \frac{20\pi}{3} cm$$

حل التمرين (50):

أ/ تحويل إلى الرديان: $10°$ ، $35°$ ، $150°$:

لدينا: $180° \rightarrow \pi\ rad$

$$10° \rightarrow \varphi\ rad$$

$$\varphi = \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{18} rad$$

لدينا: $360° \rightarrow 2\pi\ rad$

$$35° \rightarrow \varphi\ rad$$

$$\varphi = \frac{35 \times 2\pi}{360°} = \frac{7}{56} \pi rad$$

لدينا: $360° \rightarrow 2\pi\ rad$

$$150° \rightarrow \varphi\ rad$$

$$\varphi = \frac{150 \times 2\pi}{360°} = \frac{5}{6} \pi rad$$

ب/ تحويل إلى الدرجة:

$\frac{3\pi}{8} rad$ ، $\frac{\pi}{5} rad$

لدينا:

$$180° \to \pi\ rad$$

$$\varphi \leftarrow \frac{3\pi}{8}\ rad$$

$$\varphi = \frac{180 \times \frac{3\pi}{8}}{\pi} = \frac{135}{2} = 67,5°$$

لدينا:

$$180° \to \pi\ rad$$

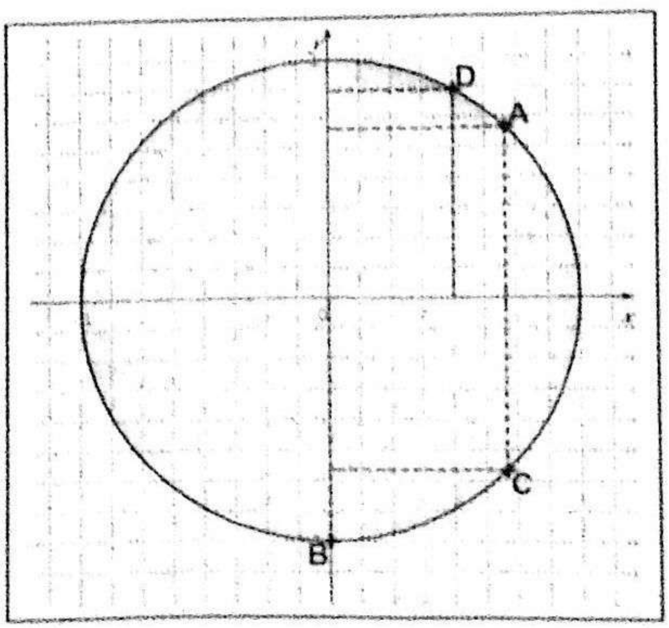
$$\varphi \to \frac{\pi}{5}\ rad$$

$$\varphi = \frac{180 \times \frac{\pi}{5}}{\pi} = 36°$$

حل التمرين (51):

تمثيل على الدائرة المثلثية النقط A ، B ، C و D صور الأعداد الحقيقية:

$\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{-\pi}{2}$ ، $\frac{7\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ على الترتيب:



حل التمرين (52):

* حساب القيم المضبوطة لجيب تمام وجيب الأعداد الآتية:

$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{5\pi}{6}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2} \\ \cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{7\pi}{6}=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2} \\ \cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)=-\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right)=-\sin\frac{7\pi}{6}=\frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)=-\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

ب/

$$\begin{cases} \sin 120\pi = \sin 0 = 0 \\ \cos 120\pi = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 213\pi = \sin \pi = 0 \\ \cos 213\pi = \cos \pi = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-128\pi) = \sin 0 = 0 \\ \cos(-128\pi) = \cos 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-789\pi) = \sin(-\pi) = -\sin \pi = 0 \\ \cos(-789\pi) = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1 \end{cases}$$

ج/

$$\begin{cases} \sin \frac{193\pi}{3} = \sin\left(64\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{193\pi}{3} = \cos\left(64\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{-193\pi}{3} = -\sin \frac{193\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{-193\pi}{3} = \cos \frac{193\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{115\pi}{4} = \sin\left(29\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{115\pi}{4} = \cos\left(29\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{-115\pi}{4} = -\sin \frac{115\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-115\pi}{4} = \cos \frac{115\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

حل التمرين (53):

* تعيين في كل حالة من الحالات الآتية العدد x من المجال $[0;\pi]$:

- $\cos x = 0$ و $x \in [0;\pi]$ ومنه: $x = \frac{\pi}{2}$.
- $\sin x = \frac{1}{2}$ و $x \in [0;\pi]$ ومنه: $x = \frac{\pi}{6}$ أو: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x \in [0;\pi]$ ومنـــه: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
- $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x \in [0;\pi]$ بما أن: $\sin x > 0$ لما $x \in [0;\pi]$ فانه لا توجـ قيمـــة لـــ x من المجـــال $[0\ ;\ \pi]$ تحقق $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x \in [0;\pi]$ ومنـــه: $x = \frac{\pi}{4}$.

حل التمرين (54):

* **تعيين في كل حالة من الحالات الآتية العدد x من المجال $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:**

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ومنه: $x = \frac{\pi}{3}$.
- $\cos x = \frac{1}{2}$ و $x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ومنه: $x = \frac{\pi}{3}$ أو: $x = -\frac{\pi}{3}$.
- $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ومنـــه: $x = -\frac{\pi}{4}$.

حل التمرين (55):

أ/ x **عنصر من** $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ **حيث:** $\sin x = \frac{2}{3}$:

* **حساب** $\cos x$:

لدينـــا: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ وعليه:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{5}{9}$$

- (مرفوض) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

أو

- (مقبول) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

ب) x عنصر من $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ حيث: $\cos x = -\frac{3}{5}$.

* حساب $\sin x$:

لدينا: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ وعليه:

$$\sin^2 x + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}$$

- (مرفوض) $\sin x = \frac{4}{5}$

أو

- (مقبول) $\sin x = -\frac{-4}{5}$

ج) x عنصر من $[-\pi, 0]$ حيث: $\sin x = -\frac{1}{3}$.

* حساب $\cos x$:

لدينا: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{8}{9}$$

• (مقبـــول) $\cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

أو

• (مقبـــول) $\cos x = -\frac{-\sqrt{8}}{3} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

حل التمرين (56):

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية x من $\left[\frac{-\pi}{2};2\pi\right]$ حيث: $\cos x \geq 0$ نعلم أن:

$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$ ومنه: توجد نقطتان J و J' من الدائرة المثلثية (C) في المعل

المتعامد والمتجانس (O,I,J) صورتا العددان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ على الترتيب حيث

$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

نلاحظ أن J' هي أيضا صورة لـ $\frac{-\pi}{2}$ ومنه يكون $\cos x \geq 0$ إذا وفقط إذا كانت صور

الأعداد x على الدائرة المثلثية (C) تنتمي إلى $\hat{J'J}$ أي x عدد من $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right] \cup \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

وعليه: $S = \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

ب/ تعيين الأعداد الحقيقية x من $[-2\pi;3\pi]$ حيث: $\sin x \leq \frac{1}{2}$

نعلم أن: $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ومنه توجد نقطتان A و B من الدائرة المثلثية (C) في

المعلم المتعامد والمتجانس (O,I,J) صورتا العددان $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ على الترتيب حيث

$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$، نلاحظ أيضا أن A صورة للأعداد $2\pi+\frac{\pi}{6}, -2\pi+\frac{\pi}{6}$

أي $\frac{13\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}$ و B صورة للأعداد $-2\pi+\frac{5\pi}{6}$ ، $2\pi+\frac{5\pi}{6}$ أي: $\frac{17\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}$.

ومنه: يكون $\sin x \leq \frac{1}{2}$ إذا وفقط إذا كانت صور الأعداد x على الدائرة المثلثية (C)

تنتمي إلى القوس $\hat{AB}$ أي x عدد من $\left[-2\pi;\frac{-11\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{-7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\frac{13\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{6};3\pi\right]$

وعليه: $S = \left[-2\pi;\frac{-11\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{-7\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6};\frac{13\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{6};3\pi\right]$.

حل التمرين (57):

1) دراسة تغيرات الدالة $\cos x$ على $[0 ; 2\pi]$:

• على المجال $[0 ; \pi]$:

من أجل كل x_1, x_2 من $[0 ; \pi]$ حيث: $x_1 < x_2$

فإن: $\cos x_1 > \cos x_2$

ومنه: الدالة $\cos$ متناقصة تماما على المجال $[0 ; \pi]$.

على المجال $[\pi ; 2\pi]$ من أجل كل x_1, x_2 من $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$ حيث: $x_1 < x_2$

فإن: $\cos x_1 < \cos x_2$

ومنه: الدالة $\cos$ متزايدة تماما على المجال $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

على المجال $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$: من أجل كل x_1, x_2 من $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ حيث: $x_1 < x_2$

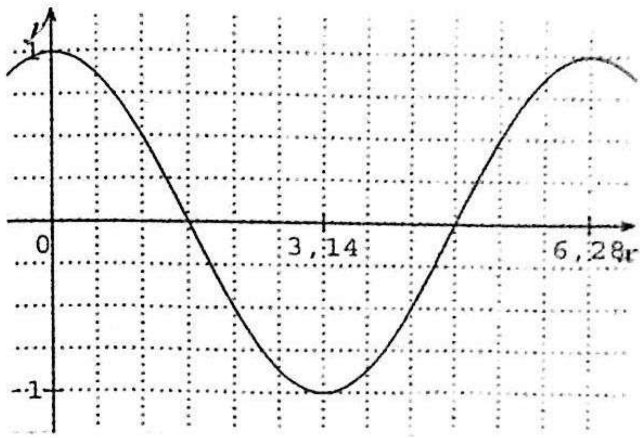
فإن: $\cos x_1 < \cos x_2$.

ومنه: الدالة $\cos$ متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$

• جدول تغيرات $\cos$ على $[0 ; 2\pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos	1	↘	-1	↗	1

* **التمثيـــل البياني للدالـــة** cos :



* **استنتاج حلول كل معادلة من المعادلات الآتية:**

$\cos x = 0$ ، $\cos x = 1$ ، $\cos x = -1$.

* **ثم استنتاج كذلك عدد حلول المعادلة** $\cos x = -\frac{5}{7}$:

من خلال البيان: $\cos x = 0$ من أجل: $x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

$\cos x = 1$ من أجل: $x = 0$ أو $x = 2\pi$ ، $x = \{0\ ;\ 2\pi\}$.

$\cos x = -1$ من أجل: $x = \pi$ ، $S = \{\pi\}$

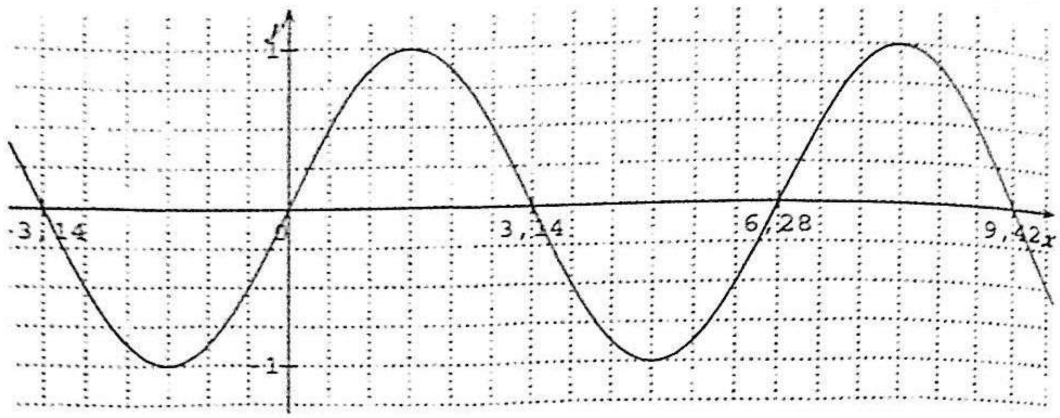
ولدينا عدد حلول المعادلة $\cos x = \frac{5}{7}$ هما حلان مختلفان.

حل التمرين 58:

* دراسة تغيرات الدالة sin على المجـــال $[-\pi\ ;\ 3\pi]$:

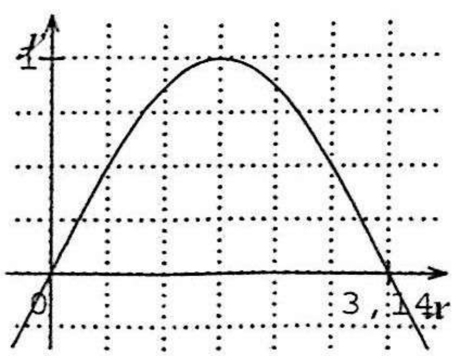
x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π
sin	0 ↘	−1 ↗	1 ↘	−1 ↗	1 ↘	0

• التمثيـــل البيانـي:



حل التمرين (59):

• التمثيـــل البياني للدالـــة sin على $[0\ ;\ \pi]$:

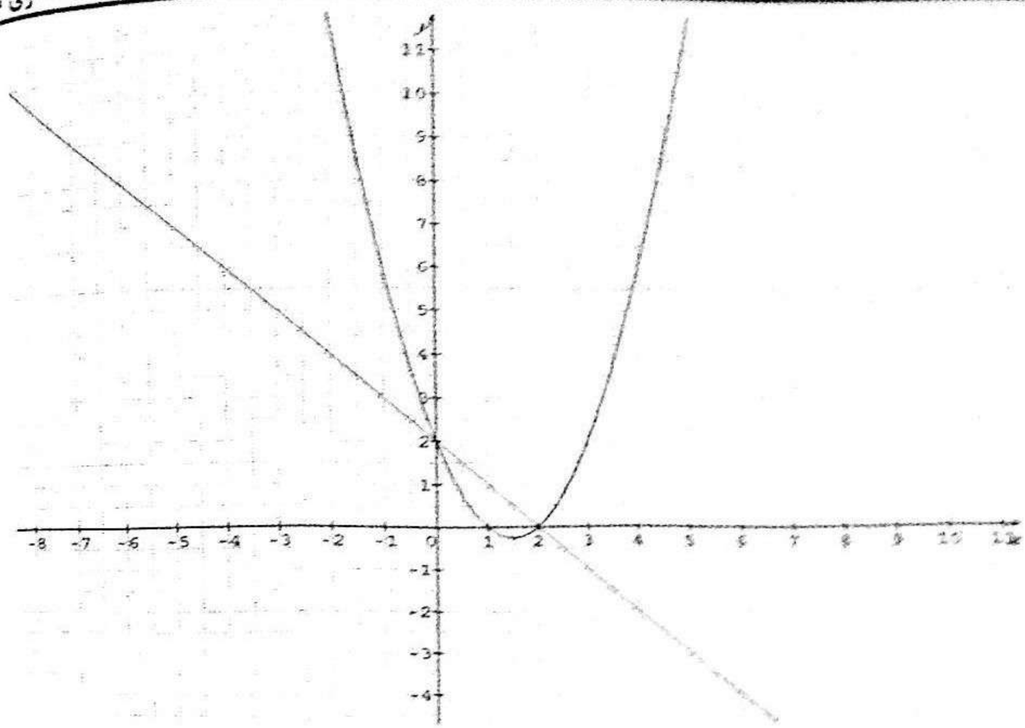


لإنشاء بيان هذه الدالة على المجال $[0;2\pi]$ ننشئ التمثيـــل البياني للدالـــة sin على $[0\ ;\ \pi]$ وبالتناظر بالنسبة إلى النقطة $(\pi;0)$ نرسم الجزء على المجال $[\pi;2\pi]$.

مسائل

حل التمرين (60):

أ/ التمثيل البياني للدالتين: $x \to -x+2$ و $x \to x^2-3x+2$ باستعمال الحاسبة البيانية أو الكمبيوتر:



ب/ قراءة على الشكل المنجز، مجموعة حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ ومجموعة حلول المتراجحة $f(x)<g(x)$ ثم تأكد بالحساب:

* من خـــلال التمثيل البياني:

- $f(x)=g(x)$ أي: $S=\{0,2\}$.
- $f(x)<g(x)$ أي: $x\in]0,2[$.

* حسابيـــا:

$$f(x)=g(x)$$
$$x^2-3x+2=-x+2$$
$$x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$

$x=0$ أو $x=2$.

ومنه: $S=\{0,2\}$.

$f(x) < g(x)$

$x^2 - 3x + 2 < -x + 2$

$x^2 - 2x < 0$

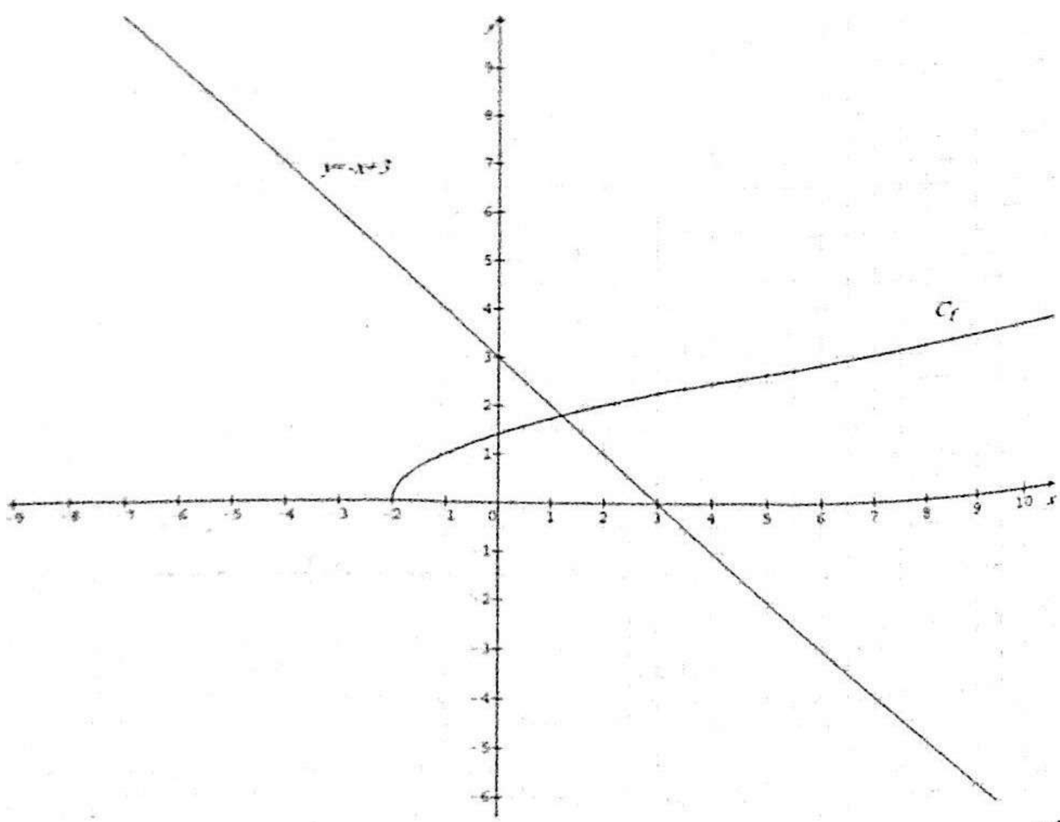
$x(x-2) < 0$

قيم x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
إشارة x		$-$	0	$+$	|	$+$	
إشارة $x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
إشارة $x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه: $S =]0\ ;\ 2[$.

حل التمرين (61):

• التمثيل البياني للدوال $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = -x + 3$



• استنتاج حصرا لحل المعادلة $\sqrt{x+2} = -x + 3$.

حل المعادلة $\sqrt{x+2}=-x+3$ هو فاصلة نقطة تقاطع التمثيليان البيانيين وبالتالي

حصرا لحل المعادلة $\sqrt{x+2}=-x+3$ هو: $1<x_0<1,5$.

حل التمرين (62):

أ/ دراسة تغيرات الدالة f حيث: $f(x)=1+\dfrac{3}{x}$ على المجال $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

من أجـل كل x_2 ، x_1 من $]0 ; +\infty[$ حيث: $x_1<x_2$

فإن:

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$$

$$\frac{3}{x_1}>\frac{3}{x_2}$$

$$1+\frac{3}{x_1}>1+\frac{3}{x_2}$$

ومنه: f متناقصة تماما على المجال $]0 ; +\infty[$

من أجل كل x_2 ، x_1 من $]-\infty ; 0[$ حيث: $x_1<x_2$.

فإن:

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$$

$$\frac{3}{x_1}>\frac{3}{x_2}$$

$$1+\frac{3}{x_1}>1+\frac{3}{x_2}$$

ومنـه: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; 0[$

ب/

$$x=\frac{3+0,99.......7}{0,99.....7}=1+\frac{3}{0,99.....7}$$

$$y=\frac{3+0,99........3}{0,99........3}=1+\frac{3}{0,99.....3}$$

بما أن: $0,99......3<0,99......7$

و f متناقصـــة على $]0\ ;\ +\infty[$ فإن: $f(0,99.....7) < f(0,99.....3)$

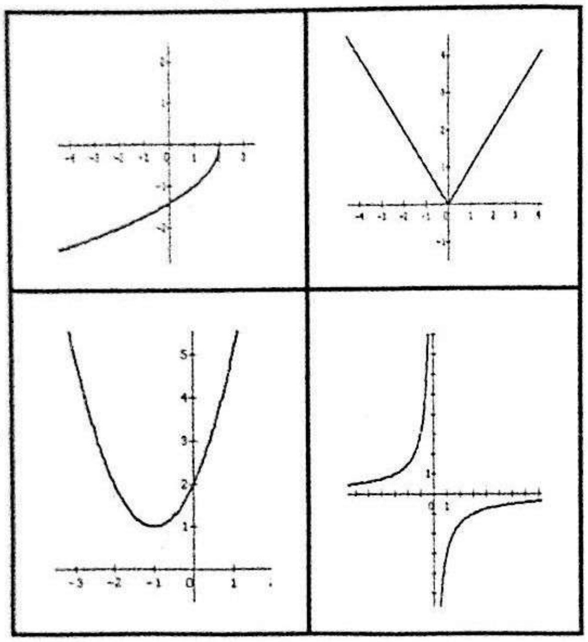
ومنـــه: $y > x$.

☜ حل التمرين (63) :

* إرفاق كل دالة من الدوال الآتية بتمثيلها البياني:

$k : x \to |x|$

$: x \to -\sqrt{-x+2}$



$g : x \to \dfrac{-3}{x}$

$: x \to x^2 + 2x + 2$

☜ حل التمرين (64) :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

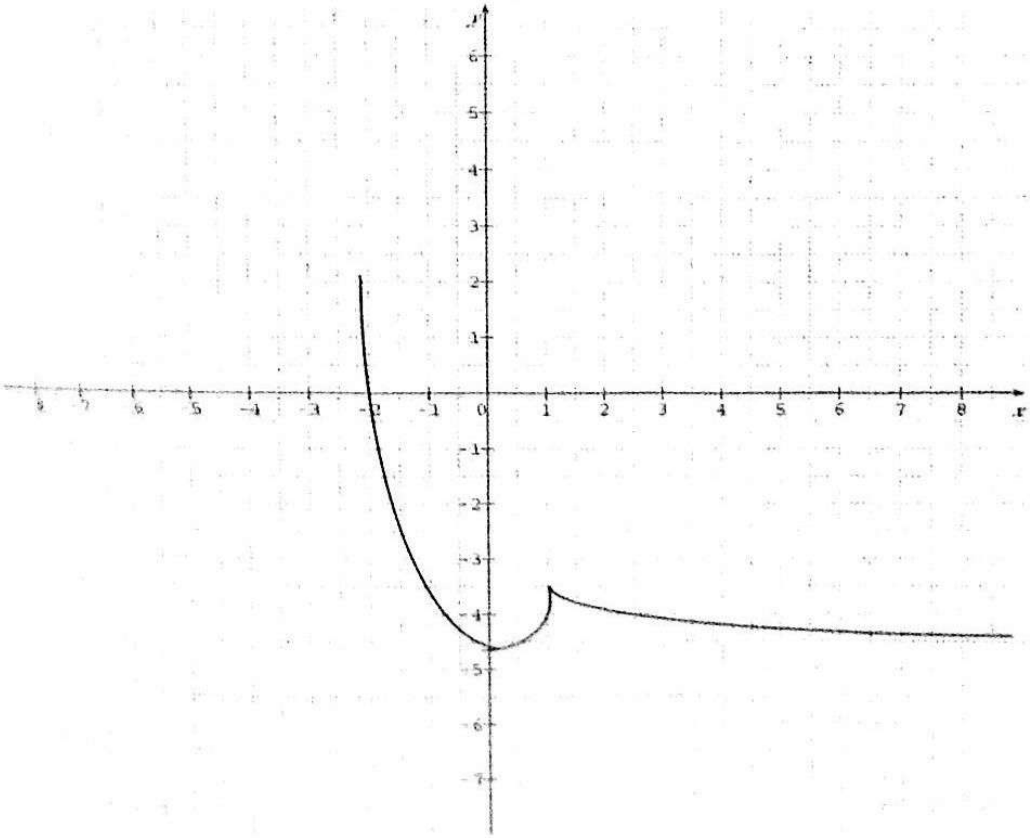
- $f(x) = x^2$ إذا كان: $x \le 0$.
- $f(x) = \sqrt{x}$ إذا كان: $0 < x \le 1$.
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ إذا كان: $x > 1$.

أ/ تمثيل بيانيا الدالة f : لاحظ الشكل أدناه.

ب/ حل بيانيا ثم جبريا المتراجحة $f(x) \le \dfrac{1}{4}$:

الحل البياني للمتراجحة $f(x) \le \frac{1}{4}$: الحل البياني للمتراجحة $f(x) \le \frac{1}{4}$ هي

المجموعة S حيث : $S = \left[-\frac{1}{2};0\right[\cup \left[0;\frac{1}{16}\right] \cup [4;+\infty[$



الحل الجبري للمتراجحة $f(x) \le \frac{1}{4}$:

لما $x \in]-\infty;0[$: $f(x) \le \frac{1}{4}$ يعني : $x^2 \le \frac{1}{4}$

أي : $x^2 - \frac{1}{4} \le 0$ و بالتالي : $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \le 0$

بما أن $x-\frac{1}{2} < 0$ و عليه $x+\frac{1}{2} \ge 0$ أي : $x \ge -\frac{1}{2}$

و عليه حل المتراجحة على هذا المجال هو $x \in \left]-\frac{1}{2};0\right[$.

لما $x \in]0;1[$: $f(x) \le \frac{1}{4}$ يعني : $\sqrt{x} \le \frac{1}{4}$ بالتربيع: $x \le \frac{1}{16}$

و عليه حل المتراجحة على هذا المجال هو $x \in \left]0;\frac{1}{16}\right]$.

لما $x \in]1;+\infty[$: $f(x) \le \frac{1}{4}$ يعني : $\frac{1}{x} \le \frac{1}{4}$ أي : $4 \le x$

و عليه حل المتراجحة على هذا المجال هو $x \in [4;+\infty[$.

وبالتالي الحل الجبري للمتراجحة $f(x) \le \frac{1}{4}$ هي المجموعة S حيث :

$$S = \left[-\frac{1}{2};0\right[\cup \left[0;\frac{1}{16}\right] \cup [4;+\infty[$$

حل التمرين (65) :

* **بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** x : $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

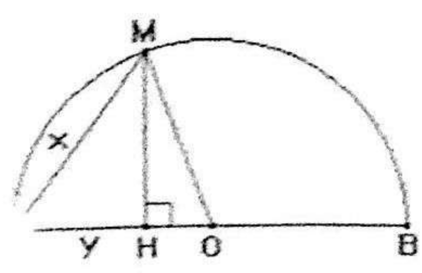
$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \ \cos x$$
$$= 1 + 2\sin x \cos x$$

* **بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي** x :

$$(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$$
$$(1 + \sin x + \cos x)^2 = (1 + \sin x)^2 + \cos^2 x + 2(1 + \sin x).\cos x$$
$$= 1 + (\sin x)^2 + (1 - \sin^2 x) + 2(1 + \sin x).\cos x$$
$$= (1 + \sin x)^2 + (1 - \sin x)(1 + \sin x) + 2(1 + \sin x).\cos x$$
$$= (1 + \sin x)[1 + \sin x + 1 - \sin x + 2\cos x]$$
$$= (1 + \sin x)(2 + 2\cos x) = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$$

حل التمرين (66) :

M نقطة متغيرة على نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ حيث: $AB = 4$.



نسمي H المسقط العمودي للنقطة M على $[AB]$. نضع $AM = x$ و $AH = y$

1) النقطـة H تنتمي إلى $[AB]$:

ومنـه:

$$0 \leq AH \leq AB$$
$$0 \leq y \leq 4$$
$$y \in [0,4]$$

2) أ/ الحالـة الأولى:

H بين A و O:

*** في المثلث AMH القائـم في H حسب فيثاغورث:**

$$AH^2 = AH^2 + MH^2$$
$$x^2 = y^2 + MH^2$$

ومنـه: $MH^2 = x^2 - y^2$

في المثلث OMH القائـم في H حسب فيثاغورث:

$$OH^2 = MH^2 + OH^2$$
$$OH^2 = MH^2 + (2-y)^2$$
$$OH^2 = MH^2 + 4 - 4y + y^2$$
$$MH^2 = 4y - y^2$$

ب/ بمـا أن:

$$MH^2 = x^2 - y^2$$
$$MH^2 = 4y - y^2$$
$$x^2 - y^2 = 4y - y^2$$
$$y = \frac{1}{4}x^2$$

3) أ/ دراسـة تغيرات f على $[0,4]$:

من أجـل كل x_2 ، x_1 من $[0,4]$ حيث: $x_1 < x_2$

فإن: $x_1^2 < x_2^2$

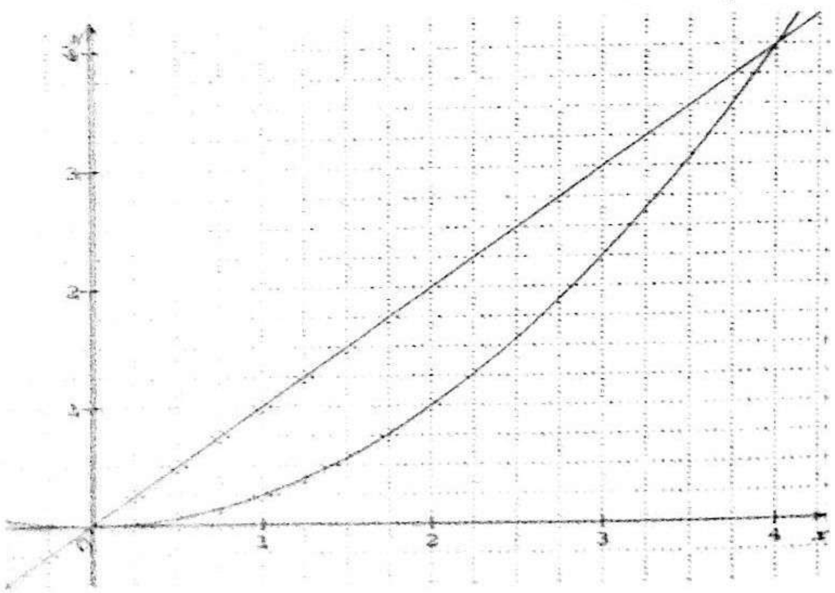
أي: $\frac{1}{4}x_1^2 < \frac{1}{4}x_2^2$ وبالتالي: $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه: f متزايدة تماما على المجال $[0,4]$

ب/

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

ج/ **التمثيـل البيانـي لــ f :**



4) g هي الدالة المعرفة على $[0,4]$ بالشكل $g(x)=x$.

أ/ تمثيل بيانيا g في المعلم السابق.

ب/ استنتج من البيان السبق أنه من أجل كل عدد حقيقي من $[0,4]$ لدينا: $g(x) \geq f(x)$:

من البيان لدينا (C_g) يقع فوق (C_f) لما $x \in [0,4]$

ومنه: $g(x) \geq f(x)$.

5) أ/ بيان أنه توجد قيمة x_0 للعدد x تجعل $AM - AH$ أكبر ما يمكن. $AM - AH$ أكبر ما يمكن يعني أن: $x - y$ أكبر ما يمكن.

من خلال البيان نجد أنه من أجل $x_0 = 2$ يكون $AM - AH$ أكبر ما يمكن.

ب/ $AM - AH = x - y = x - \frac{1}{4}x^2$

لدينـــا:
$$h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$$
$$= -\frac{1}{4}(x^2 - 4x) = -\frac{1}{4}\left[(x-2)^2 - 4\right]$$

• **دراســـة تغيــرات h على $[0,4]$:**

• **على المجـــال $[0,2]$:**

من أجل كل x_1 ، x_2 من $[0,2]$ حيث: $x_1 < x_2$.

فإن: $x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$ بما أن: الدالة مربع متناقصة على المجال $]-\infty;0]$

$$(x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$$
$$(x_1 - 2)^2 - 4 > (x_2 - 2)^2 - 4$$
$$-\frac{1}{4}\left[(x_1 - 2)^2 - 4\right] < -\frac{1}{4}\left[(x_2 - 2)^2 - 4\right]$$
$$h(x_1) < h(x_2)$$

ومنه: h متزايدة تماما على المجال $[0,2]$

على المجـــال $[2,4]$:

من أجل كل x_1 ، x_2 من $[2,4]$ حيث: $x_1 < x_2$

فإن: $x_1 - 2 < x_2 - 2$

$$(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$$
$$(x_1 - 2)^2 - 4 < (x_2 - 2)^2 - 4$$
$$-\frac{1}{4}\left[(x_1 - 2)^2 - 4\right] > -\frac{1}{4}\left[(x_2 - 2)^2 - 4\right]$$
$$h(x_1) > h(x_2)$$

ومنه: h متناقصة تماما على المجال $[2,4]$:

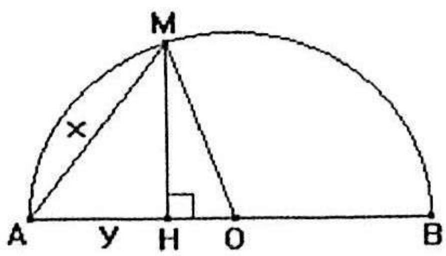
x	0		2		4
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

تقبل الدالة h قيمة حدية عظمى لما $x = 2$.

ومنه: $AM - AH$ أكبر ما يمكن لما $x = 2$.

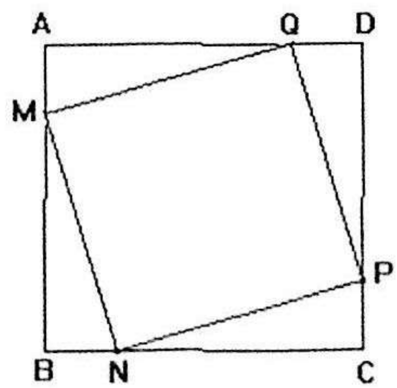
وضعية M: $y = \frac{1}{4}x^2 = 1$ أي: $AH = 1$.

☜ **حل التمرين (67):**



$ABCD$ مربع طول ضلعه $4cm$. النقط M، N، P، Q تنتمي هي على الترتيب إلى $[AB]$، $[BC]$، $[CD]$، $[DA]$.

حيث: $AM = BN = CP = DQ = x$.



1) $x \in [0,4]$.

2) **حساب مساحة المربع $MNPO$:**

S: مساحة $MNPO$:

لدينا: $MN^2 = MB^2 + BN^2$ أي: $MN^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$

ومنه: $S = MN^2 = 10\,cm^2$

3) بيان أن مساحة المربع $MNPQ$ هي: $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$:

لدينا:

$$MN^2 = (4-x)^2 + x^2$$

$$MN^2 = 16 - 8x + x^2 + x^2$$
$$= 2x^2 - 8x + 16$$

ومنـــه: $S = MN^2 = 2x^2 - 8x + 16$

4) التأكد أن: $f(x) = 2[(x-2)^2 + 4]$ وتعيين أصغر قيمة ممكنة للعدد $f(x)$:

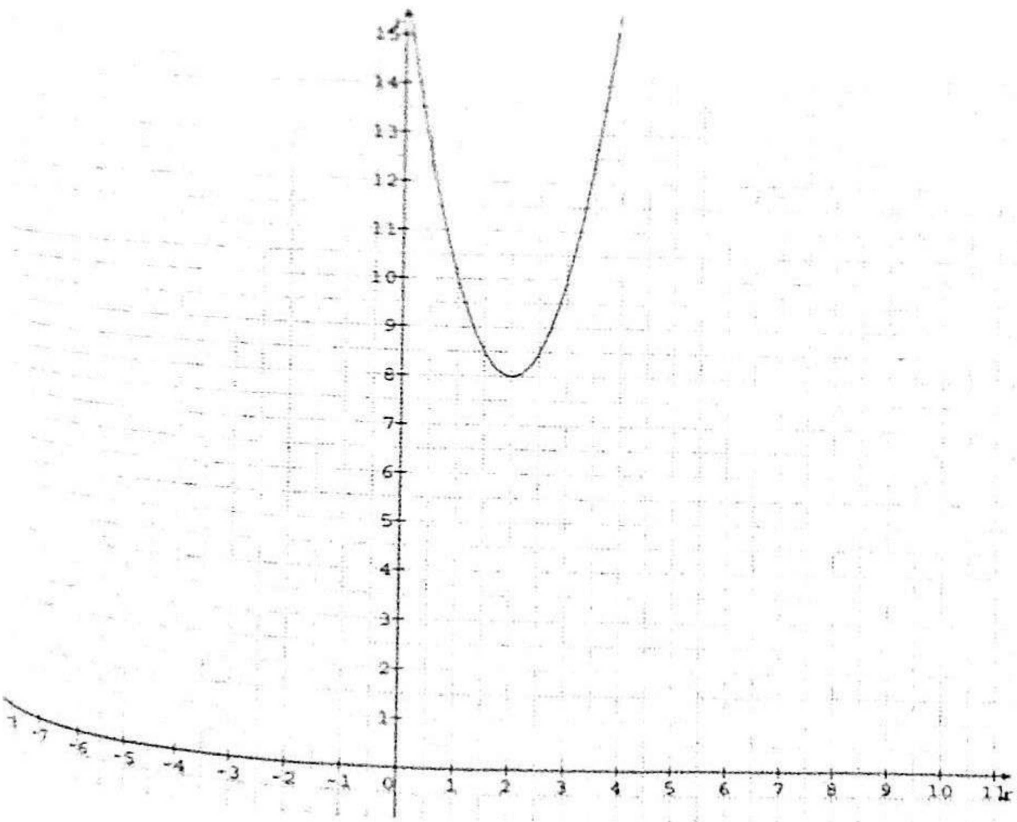
$$f(x) = 2x^2 - 8x + 16$$
$$= 2[x^2 - 4x + 8] = 2[(x-2)^2 - 4 + 8]$$
$$= 2[(x-2)^2 + 4]$$

أصغـــر قيمـــة ممكنـــة للعـــدد $f(x)$ هي: $f(2) = 8$.

لأن: f متناقصـــة على $[0,2]$ و f متزايـــدة على $[2,4]$.

ومنـــه: f تقبـل قيمـــة حديـــة صغرى لمـــا $x = 2$.

5) إنشـــاء (C_f):



• **القيمة المقربة للعدد x الذي من أجله تكون مساحة المربع $MNPQ$ $12cm^2$:**

من خلال البيان توجد قيمتان تكون من أجلهما مساحة المربع $MNPQ$ $12cm^2$ هما:

$x_0 = 0,6$ و $x_1 = 0,6$.

القيم الحقيقية لهذه القيم هما: $x_0 = 2-\sqrt{2}$ و $x_1 = 2+\sqrt{2}$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	2	4
h	16 ↘	8	↗ 16

جمع و رفع " أمل النجاح "

لا تنسوني من صالح دعائكم