**الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية**

**وزارة التربية الوطنية**      **الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات**

**امتحان بكالوريا التعليم الثانوي**      **دورة: 2016**

**الشعبة :رياضيات**

**اختبار في مادة: الرياضيات**      **المدة: 04 سا و 30 د**

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

## الموضوع الأوّل

**يحتوي الموضوع الأول على 03 صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5).**

**التمرين الأوّل: ( 04,5 نقطة )**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1;1;0)$ ، $B(2;-1;1)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ ، $E(0;1;1)$ ، $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$

و المستوي $(P)$ المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$ ، $\alpha$ و $\beta$ وسيطان حقيقيان.

1) أ) بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تُعيّن مستويا.

ب) تحقّق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\text{P})$ ثم بيّن أن المستويين $(ABC)$ و $(\text{P})$ متقاطعان.

ب) نسمي $(\Delta)$ مستقيم تقاطع المستويين $(ABC)$ و $(\text{P})$.

– تحقّق أنّ النقطة $D$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$ و أنّ $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم $(\Delta)$.

جـ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$.

د) بيّن أنّ النقطة $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $A$ على المستقيم $(\Delta)$ ثم استنتج المسافة بين $A$ و $(\Delta)$.

3) G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,2);(B,-3);(C,2)\}$.

نسمي $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تُحقّق: $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{GM}=11$ .

أ) عيّن إحداثيات النقطة $G$.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة $(\Gamma)$ ثم بيّن أنّها سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

جـ) حدّد الوضعية النسبية للمستوي $(ABC)$ و المجموعة $(\Gamma)$.

**التمرين الثاني: ( 04,5 نقطة)**

$(u_n)$ متتالية هندسية متزايدة تماما، حدودها موجبة تماما، حدّها الأوّل $u_0$ و أساسها $q$ حيث: $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4\left(1+e^3\right) \end{cases}$

1) احسب $u_1$ و $u_2$ ثم استنتج قيمة الأساس $q$ .

2) نضع: $u_1=e^4$ و $q=e^3$ .

أ) عبّر عن $u_n$ بدلالة $n$.

ب) نضع : $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_n)$. احسب $S_n$ بدلالة $n$.

3) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع: $a_n = n+3$ .
أ) بيّن أنّ : $PGCD(2S_n, a_n) = PGCD(a_n, 14)$ .
ب) عيّن القيم الممكنة لـ: $PGCD(2S_n, a_n)$ .
جـ) عيّن قيم الأعداد الطبيعية $n$ التي من أجلها : $PGCD(2S_n, a_n) = 7$ .
4) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^n$ على $7$ .
5) نضع: $b_n = 3na_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$ .
عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون : $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ .
6) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد $\left(1437^{9n+1} - 3\times 4^{12n+1} + 52\right)$ يقبل القسمة على $7$ .

**التمرين الثالث: ( 04,5 نقطة)**

1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$ .
ب) استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب $z$ الآتية: $\left(z+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^2 - 4z + 1 - 4i\left(1-\sqrt{3}\right) = 0$ .
2) $\theta$ عدد حقيقي حيث : $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $z_0$ عدد مركب طويلته $1$ و $\theta$ عمدة له .
أ) اكتب العدد المركب $1+i\sqrt{3}$ على الشكل الأسي.
ب) عيّن $\theta$ علما أنّ: $\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\overline{z_0}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ . ( $\overline{z_0}$ هو مرافق العدد المركب $z_0$ ).
جـ) $n$ عدد طبيعي. من أجل قيمة $\theta$ المتحصل عليها، اكتب العدد المركب $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ على الشكل المثلثي.
د) عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n$ عددا حقيقيا موجبا تماما.
3) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ حيث: $z_A = 2-i$ ، $z_B = 2+i$ و $z_C = 1+i\sqrt{3}$ .
أ) عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ .
ب) استنتج أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.
جـ) $E$ النقطة من المستوي المركب ذات اللاحقة $z_E$ حيث: $\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$ .
– بيّن أنّ : $z_E = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i$ .
– بيّن أنّ النقطة $A$ هي صورة النقطة $B$ بتشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.
4) $M$ نقطة من المستوي المركب لاحقتها $z$ ، النقطة $I$ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.
أ) عيّن $z_I$ لاحقة النقطة $I$ .
ب) $\alpha$ عدد حقيقي، نسمي $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي المركب التي تُحقّق: $z - z_I = e^{i\alpha}$ .
– تحقّق أنّ النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$.
– عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و عناصرها المميّزة عندما يتغيّر $\alpha$ في $\mathbb{R}$ .

**التمرين الرابع: ( 06,5 نقطة)**

**I)** $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1+x^2+2\ln x$ .

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0,52\,;\,0,53[$ حلاً وحيدا $\alpha$ .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

**II)** $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\dfrac{3+2\ln x}{x}$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ .

ب) شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$ .

جـ) تحقّق أنّ : $f(\alpha)=2\left(\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ثم عيّن حصرا له.

3) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل $(\Delta)$.

جـ) بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

4) نقبل أنّ $(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $x_0$ و $x_1$ حيث:

$0,22<x_0<0,23$ و $2,11<x_1<2,13$

أنشئ $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(C_f)$.

5) $m$ وسيط حقيقي . ناقش بيانيا و حسب قيم $m$، عدد حلول المعادلة : $3+2\ln x-mx=0$ .

**III)** من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)+x\right]dx$ .

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n>0$ .

2) أعط تفسيرا هندسيا للعدد $u_0$ .

3) احسب $u_n$ بدلالة $n$.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$. احسب $S_n$ بدلالة $n$.

**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني

**يحتوي الموضوع الثاني على صفحتين (الصفحة 4 من 5 والصفحة 5 من 5).**

**التمرين الأوّل: (05 نقاط)**

1) الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ حيث: $A(1;0;3)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(0;0;2)$ و $D(3;4;1)$.

أ) عيّن العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;-\beta)$ ناظميا للمستوي $(ABC)$.

ب) جد معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$.

2) $z=2-x$ و $y=2z-2x-4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين $(P)$ و $(Q)$ على الترتيب.

أ) بيّن أنّ المستويين $(P)$ و $(Q)$ متعامدان.

ب) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ تقاطع المستويين $(P)$ و $(Q)$.

ج) احسب المسافة بين النقطة $D$ و المستقيم $(\Delta)$.

3) $(S)$ سطح الكرة التي مركزها $D$ و مماس للمستوي $(Q)$ .

أ) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة $(S)$.

ب) جد الطبيعة والعناصر المميّزة لتقاطع $(P)$ و $(S)$.

4) $\lambda$ عدد حقيقي، $G_\lambda$ نقطة من الفضاء حيث: $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^{\lambda}\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$ . ($e$ يرمز إلى أساس اللوغاريتم النبيري).

أ) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء التي تُحقّق: $(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|$

ب) $H$ مرجح الجملة $\{(A,2);(\mathrm{B},-1)\}$. اكتب $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$.

ج) عيّن مجموعة النقط $G_\lambda$ لمّا يتغيّر $\lambda$ في المجموعة $\mathbb{R}$ .

د) جد قيمة $\lambda$ التي تكون من أجلها $G_\lambda$ منتصف القطعة $[CH]$ .

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

**I)** 1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$ .

2) جد العددين المركبين $z_1$ و $z_2$ حيث: $\begin{cases}2z_1-3z_2=5i\sqrt{2}\\ z_1+3z_2=-2i\sqrt{2}\end{cases}$.

**II)** المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $H$ لاحقاتها على الترتيب : $z_A=i\sqrt{2}$ ، $z_B=-i\sqrt{2}$ ، $z_C=1+i$ ، $z_D=1-i$ و $z_H=\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}$ حيث $E$ النقطة التي تُحقّق: $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DO}$.

1) اكتب $z_H$ على الشكل الأسي و استنتج نوع المثلث $BEC$ .

2) $S$ تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة $M$ لاحقتها $z$ النقطة $M'$ لاحقتها $z'$ حيث: $z'=z_A z+z_B$ .

أ) ما هي طبيعة التحويل $S$ ؟ و ما هي عناصره المميّزة ؟

ب) احسب مساحة الدائرة $(\gamma)$ التي مركزها $C$ و نصف قطرها $CD$.

ج) عيّن $(\gamma')$ صورة $(\gamma)$ بالتحويل $S$ و استنتج مساحتها.

3) عيّن $(\delta)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ( $M$ تختلف عن $B$ و $C$) ذات اللاحقات $z$ التي يكون من أجلها العدد $\dfrac{z_B-z}{z_C-z}$ حقيقيا سالبا تماما.

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

1) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $3^n$ و $7^n$ على $11$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، العدد $2\times 2016^{5n+4}+1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد $11$.

2) نعتبر المعادلة $(E)$ ذات المجهول $(x;y)$ : $7x-3y=8$ ، حيث $x$ و $y$ عددان طبيعيان.

أ) حلّ المعادلة $(E)$.

ب) $d$ القاسم المشترك الأكبر للعددين $x$ و $y$ حيث الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة $(E)$ .

– ما هي القيم الممكنة للعدد $d$ ؟

– عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ من أجل $d=4$.

جـ) جد الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة $(E)$ التي تحقق: $2016^{7x}+1437^{3y}\equiv 0[11]$.

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

**I)** $\varphi$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $\varphi$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاّ $\alpha$ يختلف عن $1$ ثم تحقّق أنّ: $2{,}79<\alpha<2{,}80$.

3) استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

**II)** $f$ و $g$ الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

$(C_f)$ و $(C_g)$ تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2) بيّن أنّ للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ مماسا مشتركا $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة $1$ ثم جد معادلة له.

3) ارسم المماس $(T)$ و المنحنى $(C_f)$.

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$ .

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$.

جـ) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي $x$ : $\int_1^x f(t)\,dt$ .

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ و المستقيمين اللذيْن معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

**III)** 1) احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$ . أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم.
( $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة $n$ للدالة $f$ ).

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$ .

3) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم $k$ ، المجموع : $u_k+u_{k+1}$.

ب) استنتج بدلالة $n$ ، المجموع : $u_1+u_2+...+u_{2n}$.

**انتهى الموضوع الثاني**