<table>
<tr><th colspan="2">العلامة</th><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th></tr>
<tr><th>مجموع</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td rowspan="10">$04,5$</td><td></td><td><u>التمرين الأوّل:</u> (04,5 نقطة)</td></tr>
<tr><td>$0,25$</td><td>1.أ) $\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$ غير مرتبطين خطيا</td></tr>
<tr><td>$0,75$</td><td>ب) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ و $x+3y+5z-4=0$ معادلة للمستوي (ABC).</td></tr>
<tr><td>$0,25\times 2$</td><td>2.أ) $(P):x+3y+z-6=0$ و الشعاعين $\vec{n}$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطيا.</td></tr>
<tr><td>$0,50\times 2$</td><td>ب) $D\in(\Delta)$ و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.</td></tr>
<tr><td>$0,25$</td><td>جـ) $(\lambda\in\mathbb{R})$, $(\Delta)\begin{cases} x=-3\lambda+\frac{1}{2} \\ y=\lambda+2 \\ z=-\frac{1}{2}\end{cases}$.</td></tr>
<tr><td>$0,75$</td><td>د) $(H\in(\Delta))$ و $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$ و $d(A;(\Delta))=AH=\frac{\sqrt{14}}{4}$.</td></tr>
<tr><td>$0,25$</td><td>3. أ) $G(-6;5;-1)$.</td></tr>
<tr><td>$0,25$
$0,25$</td><td>ب) $(\Gamma):x^2+y^2+z^2+6x-6y-7=0$.
$(\Gamma):(x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$.
(Γ) سطح كرة مركزها $\Omega(-3;3;0)$ و نصف قطرها 5.</td></tr>
<tr><td>$0,25$</td><td>جـ) $d(\Omega;(ABC))=\frac{2}{\sqrt{35}}$ و $\frac{2}{\sqrt{35}}<5$ ، (Γ) يقطع (ABC) وفق دائرة .</td></tr>
<tr><td rowspan="7">$02,75$</td><td></td><td><u>التمرين الثاني:</u> (04,5 نقطة)</td></tr>
<tr><td>$0,50$</td><td>1. u_1 و u_2 حلا المعادلة $x^2-e^4(1+e^3)x+e^{11}=0$ ، $\Delta=\left[e^4(e^3-1)\right]^2$
$u_1<u_2$ منه $u_1=e^4$ و $u_2=e^7$ و $q=e^3$</td></tr>
<tr><td>$0,25$</td><td>2.أ) $u_n=e^{3n+1}$.</td></tr>
<tr><td>$0,50$</td><td>ب) $S_n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$.</td></tr>
<tr><td>$0,50$</td><td>3. أ) $2S_n=a_n(3n-4)+14$.
تبيان أن: $PGCD(2S_n,a_n)=PGCD(a_n,14)$.</td></tr>
<tr><td>$0,25$</td><td>ب) القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n,a_n)$ هي 1 ، 2 ، 7 ، 14.</td></tr>
<tr><td>$0,75$</td><td>جـ) $n=14k+4$ و $k\in\mathbb{N}$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموع</th></tr>
<tr><td>4. $k\in\mathbb{N}$
<table>
<tr><td>n</td><td>$3k$</td><td>$3k+1$</td><td>$3k+2$</td></tr>
<tr><td>الباقي</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>0,50</td><td rowspan="3">01,75</td></tr>
<tr><td>5. $n=35p$ حيث $p\in\mathbb{N}$</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>6. $1437^{9n+1}-3\times4^{12n+1}+52\equiv0[7]$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td><u>التمرين الثالث:</u> (04,5 نقطة)</td><td></td><td rowspan="14">04,5</td></tr>
<tr><td>1.أ) $z_1=2+i$ و $z_2=2-i$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>ب) $z'=1+i\sqrt{3}$ و $z"=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>2.أ) $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>ب) $\theta=\frac{\pi}{12}$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>جـ) $\left[\frac{z_0\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}\right]^n=\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>د) $n=24p$ و $p\in\mathbb{N}$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>3.أ) $z_D=1+i\left(\sqrt{3}-2\right)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>ب) الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>جـ) - $z_E=\frac{14}{5}+\frac{3}{5}i$.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>– التشابه المباشر مركزه E نسبته 2 و $\frac{\pi}{2}$ زاوية له .</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>4.أ) $z_I=2$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>ب) $\left|z_E-z_I\right|=1$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>(Γ) هي الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها 1.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td><u>التمرين الرابع:</u> (06,50 نقطة)</td><td></td><td rowspan="3">01</td></tr>
<tr><td>I) 1. $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$ ، g متزايدة تماما على المجال.</td><td>0,50</td></tr>
<tr><td>2. المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق : $0,52<\alpha<0,53$.
$g(0,52)\approx-0,04$ و $g(0,53)\approx0,01$</td><td>0,50</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة	
	مجزأة	مجموع
3. <table><tr><td>x</td><td>0 α $+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>- 0 +</td></tr></table>	$0,25$	
II) 1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.	$0,25 \times 2$	
2. أ) $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x^2}$.	$0,50$	
ب) جدول تغيرات الدالة f .	$0,25$	
جـ) $f(\alpha) = 2\left(\dfrac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ و $2,71 < f(\alpha) < 2,81$.	$0,25 \times 2$	
3. أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) + x \right] = 0$ ، (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = -x$.	$0,25 \times 2$	
ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .	$0,25$	
جـ) $(T): y = -x + 2\sqrt{e}$.	$0,50$	
4. إنشاء (T) و (Δ) و (C_f) .	$0,50$	
5. المناقشة بيانيا: – إذا كان $m \le 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا وحيدا. – إذا كان $0 < m < 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين متمايزين. – إذا كان $m = 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلا مضاعفا. – إذا كان $m > 2\sqrt{e}$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا.	$0,50$	$05,50$
III) 1. الدالة $h: x \mapsto f(x) + x$ موجبة تماما على المجال $\left[e^n; e^{n+1}\right]$ من أجل كل عدد طبيعي n .	$0,25$	
2. u_0 يشير إلى مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = e$.	$0,25$	
3. $u_n = 2n + 4$.	$0,50$	
4. $S_n = n^2 + 5n + 4$.	$0,25$	

مجموع	مجزأة	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)
		التمرين الأوّل: (05 نقاط)
	0,50	1) أ. $\overrightarrow{AB}(0;2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ ومنه $\alpha=1$ و $\beta=2$.
	0,50	ب . $(ABC): 2x+y-2z+4=0$.
	0,25	2) أ . $\vec{n}\perp\vec{n}$ ، $\vec{n}\cdot\vec{n}_{(P)}=0$.
	0,50	ب . $\begin{cases} x=t \\ y=-4t \ ;\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=2-t\end{cases}$. تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).
	0,75	جـ . المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ) . لدينا: $d(D;(Q))=4$ و $d(D;(P))=\sqrt{2}$ ومنه $d((\Delta);D)=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$
	0,25	3) أ. معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S): $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=4^2$.
05	0,25 0,50 0,25	ب . إيجاد الطبيعة والخصائص المميزة لتقاطع المستوي (Q) وسطح الكرة (S) $d(D;(P))=\sqrt{2}<4$ إذن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها نقطة تقاطع المستقيم العمودي على (P) والمار من D إذن إحداثياتها تحقق $(3+t)+0(4)+(1+t)-2=0$ أي $t=-1$ وبالتالي $\omega(2;4;0)$ نصف قطرها : r يحقق $r=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}$ أي $r=\sqrt{14}$.
	0,25	4) أ . المجموعة (Γ): $MG_0=MG_1$ ومنه (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_0G_1]$
	0,25	ب. كتابة $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$: $\overrightarrow{CG_\lambda}=\frac{1}{1+e^\lambda}\overrightarrow{CH}$.
	0,25 0,25	جـ . مجموعة النقط G_λ لما $\lambda\in\mathbb{R}$: لدينا $\lambda\in\mathbb{R}$ إذن $\frac{1}{1+e^\lambda}\in]0;1[$. مجموعة النقط هي قطعة المستقيم $[CH]$ باستثناء طرفيها C و H
	0,25	د. G_λ منتصف القطعة المستقيمة $[CH]$ معناه $\overrightarrow{CG_\lambda}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$ أي $e^\lambda=1$ فيكون بذلك $\lambda=0$.
		التمرين الثاني : (04 نقاط)
	0,50	I) 1) حل المعادلة $z^2-2z+2=0$: $S=\{1-i;1+i\}$
01,50	0,50	2) إيجاد z_1 و z_2 : $z_1=i\sqrt{2}$ و $z_2=-i\sqrt{2}$
	0,25 0,25	II) 1) كتابة z_H على الشكل الأسي و استنتاج نوع المثلث BEC . $z_E=-1+i$ ، $z_H=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=1.e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ، المثلث BEC متقايس الساقين $BC=BE$

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
2) أ. $z' = z_A z + z_B$ ، $\|z_A\| = \sqrt{2}$ إذن S تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{z_B}{1-z_A} = \frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{2}}{3}$	$0,50$ $0,50$	$02,50$
ب. $CD = \|z_D - z_C\| = \|-2i\| = 2$ إذن مساحة الدائرة $4\pi\, ua$	$0,25$	
جـ . (γ') هي الدائرة ذات المركز $C'(-\sqrt{2};0)$ صورة C ونصف قطرها $2\sqrt{2}$ مساحتها $(4\pi)(\sqrt{2})^2 = 8\pi\, ua$	$0,50$ $0,25$	
3) مجموعة النقط (δ) حيث $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما $\frac{z_B - z}{z_C - z}$ حقيقيا سالبا تماما معناه قيس الزاوية $(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi \ / k \in \mathbb{Z}$ إذن (δ) القطعة المستقيمة $[CB]$ باستثناء طرفيها B و C .	$0,50$	
<u>التمرين الثالث:</u> (04 نقاط)		04
1) أ. دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11 : $r \in \{1;3;4;5;9\}$	$0,50$	
دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 11 : $r' \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$	$0,75$	
ب. برهان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإنّ: $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ تقبل القسمة على العدد 11. لدينا $2016 \equiv 3[11]$ إذن $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ و منه: $2 \times 2016^{5n+4} \equiv 8[11] .....(1)$ لدينا $1437 \equiv 7[11]$ و منه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ أي: $1437^{10n+4} \equiv 3[11] .....(2)$ من (1) و (2) نجد : $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11]$.	$0,25$ $0,25$ $0,25$	
2) أ. مجموعة حلول المعادلة (E): $(x;y) = (3k+2;7k+2)\ , k \in \mathbb{N}$	$0,50$	
ب. − القيم الممكنة للعدد d: $d \in \{1;2;4;8\}$. − تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$. $(x;y) = (24k'+20;56k'+44)\ , k' \in \mathbb{N}$.	$0,50$ $0,50$	
جـ. $(x;y) = (30k+17;70k+37)\ , k \in \mathbb{N}$.	$0,50$	
<u>التمرين الرابع:</u> (07 نقاط)		01
I) أ. $\varphi(x) = e\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - 1$ إذن $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -1$.	$0,25 \times 2$	
ب . اتجاه التغيّر : $\varphi'(x) = -(x-1)(x-2)e^{-x+1}$. الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$ الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[1;2]$.	$0,25$ $0,25$	

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
جدول تغيرات الدالة φ .	$0,25$	
2) بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا α يختلف عن 1	$0,50$	
3) إشارة $\varphi(x)$.	$0,25$	
II) 1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$0,25\times 2$	
ب) $f'(x)=(3-2x)e^{-x+1}$. إشارة $f'(x)$: $-\infty$ $+$ $\frac{3}{2}$ (0) $-$ $+\infty$ الدالة f متزايدة تماما على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. جدول التغيّرات	$0,25$ $0,25$ $0,25$	
2) المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما نفس المماس (T) أي : $\begin{cases} f(1)=g(1)=1 \\ f'(1)=g'(1)=1 \end{cases}$ و منه المنحنيين (C_f) و (C_g) لهما نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 $(T): y=x$	$0,25$ $0,25$	
3) رسم (T) و (C_f)	$0,50$	06
4) أ) تبيان أنّ: $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$	$0,25$	
ب. دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$: $-\infty$ $-$ $\frac{1}{2}$ (0) $+$ 1 (0) $+$ α (0) $-$ $+\infty$ – الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g).	$0,25$ $0,25$	
جـ. الدالة: $\int_1^x f(t)\,dt=-(2x+1)e^{-x+1}+3$.	$0,25$	
د. المساحة : $\mathrm{A}=\int_1^2 \left(f(x)-g(x)\right)dx=3-\dfrac{5}{e}-\ln 3$.	$0,25$	
III) 1) $f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$ و $f'''(x)=-(2x-7)e^{-x+1}$ ، $f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$	$0,25$	
– التخمين: $f^{n}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	$0,25$	
2) البرهان بالتراجع أنّ: من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ، $f^{n}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$	$0,50$	
3) أ. حساب : $u_{k+1}+u_k=2(-1)^k$	$0,25$	
ب. $u_1+u_2+\cdots+u_{2n}=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})=-2n$	$0,25$	

ملاحظة: تقبل جميع الطرق الممكنة للحل.