الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية محمد العيد آل خليفة - باتنة

امتحانات الثلاثي الأول — السنة الدراسية 2023-2024

المستوى والشعبة: 2 علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 03 ساعات

التمرين الأول: (05 ن)

أجب بصحيح أو خطأ، مع تبرير الصحيح وتصحيح الخاطئ في كل حالة من الحالات التالية:

(الحالات الأربع مستقلة عن بعضها البعض)

1) f و g الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}-\{1\}$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب بـ: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ و $g(x)=x^2+1$

- $f\circ g$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

- المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_g)

3) g و h دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ حيث: $h(x)=-g(x-3)$ ، (C_g) و (C_h) تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد للمستوي

- (C_h) هو صورة (C_g) بانسحاب شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$

4) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $h(x)=x^2-3x+2$

- معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة h الذي معامل توجيهه -5 هي: $y=-5x+3$

التمرين الثاني: (07 ن)

لتكن f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ وليكن (C_f) منحناها البياني في معلم للمستوين $A(\alpha;0)$ ، $B(\beta;-4)$ نقطتين من (C_f)

الجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α		-1		β	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗	‖	↗	-4	↘

1) عين $f'(\alpha)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\beta+h)+4}{h}$

2) شكل جدول إشارة $f'(x)$ وجدول إشارة $f(x)$

3) عين في $\mathbb{R}-\{-1\}$ حلول كل معادلة ومتراجحة مما يلي: $f(x)=0$ ، $f(x)\geq 0$ و $f(x)<-4$

4) ليكن (T) المماس لـ (C_f) في النقطة A و (T') المماس لـ (C_f) في النقطة B ،

– اكتب معادلة لكل من (T) و (T')

نعتبر في كل ما يلي من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=\dfrac{-x^2-4x-4}{x+1}$

5) أ– احسب $f'(x)$ بدلالة x (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب– أوجد قيمة كلا من α و β

6) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=-f(x)+1$

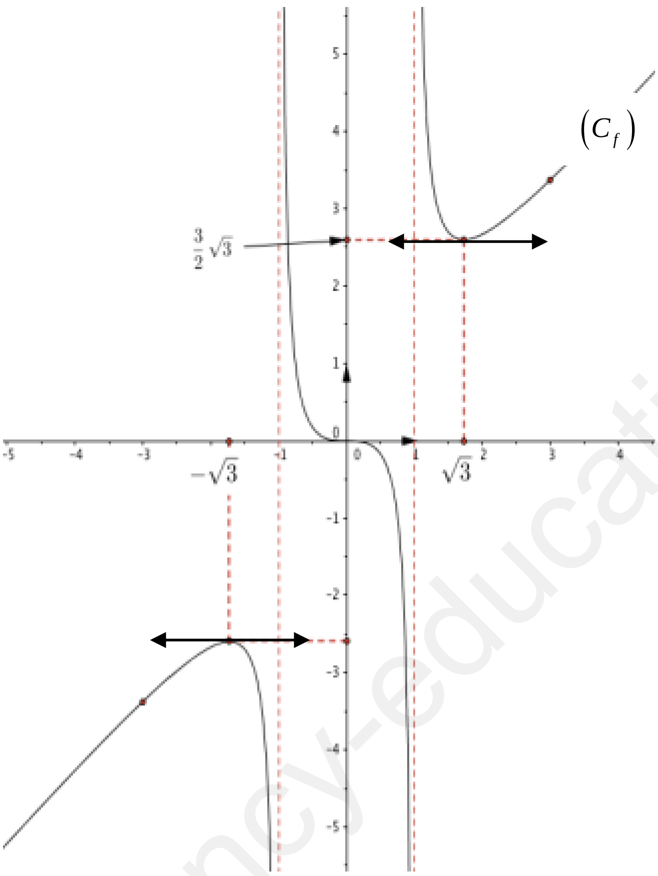
– شكل جدول تغيرات الدالة g

التمرين الثالث: (08 ن)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

(انظر الشكل المقابل)،



I- بقراءة بيانية:

1) عين $f(0)$ ، $f(\sqrt{3})$ ، $f'(\sqrt{3})$ و $f'(-\sqrt{3})$

2) شكل جدول إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$

II- نعتبر في كل مايلي أن f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

بـ: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

1) أ– أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ (f' هي الدالة المشتقة للدالة f

ب– استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ– تحقق أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب

تعيين احداثييها.

3) عين أحسن تقريب تآلفي لـ $f(x)$ بجوار 2 ثم استنتج قيمة مقربة لـ $f(1.999)$

4) بين أن النقطة $O(0;0)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ– احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ (h' هي الدالة المشتقة للدالة h)

ب– شكل جدول إشارة $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h

حل مقترح لموضوع اختبار الثلاثي الثاني (2 ع.ت)

التمرين الأول: "05 ن"

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التعليل

1) صحيح ، التبرير:

fog معرفة معناه: $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

أي $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2+1 \neq 1 \end{cases}$ اذن $x \in \mathbb{R}^*$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا:

$$(fog)(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1-1} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

2) صحيح ، التبرير:

أولا: نعين دساتير تغيير المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ إلى المعلم $(\omega;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\omega(1;0)$

لدينا: $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y \end{cases}$

ثانيا نكتب معادلة C_g في المعلم $(\omega;\vec{i},\vec{j})$

لدينا: $y = \sqrt{x^2-2x+3}$ هي معادلة (C_g) في $(O;\vec{i},\vec{j})$

فيكون: $Y = \sqrt{(X+1)^2 - 2(X+1)+3}$

بالنشر والتبسيط نجد: $Y = \sqrt{X^2+2}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{(-x)^2+2} = \sqrt{x^2+2} \end{cases}$ و

اذن: الدالة $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ دالة زوجية

وعليه منحناها متناظر بالنسبة لمحور تراتيب المعلم $(\omega;\vec{i},\vec{j})$

أي أن $x = 1$ معادلة محور تناظر (C_g)

3) خطأ ، التصحيح:

نسمي (γ) منحنى الدالة $x \mapsto g(x-3)$

(γ) صورة (C_g) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

و (C_h) صورة (γ) بالتناظر بالنسبة لمحور الفواصل.

4) خطأ:

معامل توجيه (T) هو -5 معناه: $h'(x_0) = -5$

x_0 فاصلة النقطة من (C_h) حيث (T) مماس فيها

h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$$h'(x) = 2x - 3$$

فيكون: $2x_0 - 3 = -5$ معناه: $\boxed{x_0 = -1}$

وعليه $(T): y = h'(-1)(x+1) + h(-1)$

$(T): y = -5(x+1) + 6$

اذن $(T): y = -5x + 1$

التمرين الثاني: "07 ن"

1) تعيين $f'(\alpha)$ و $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\beta+h)+4}{h}$

$\boxed{f'(\alpha) = 0}$ لأن f قابلة للاشتقاق عند α و $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\beta+h)+4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h} = f'(\beta)$$

اذن: $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\beta+h)+4}{h} = 0}$

لأن f قابلة للاشتقاق عند β و $f(\beta)$ قيمة حدية محلية.

2) تشكيل جدول اشارة كل من $f'(x)$ و $f(x)$

x	$-\infty$		α		-1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		α		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

3) تعيين حلول كل معادلة ومتراجحة

* حلول المعادلة $f(x)=0$ هي S_1 حيث: $S_1 = \{\alpha\}$
* حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي S_2 حيث: $S_2 =]-\infty; -1[$
* حلول المتراجحة $f(x) < -4$ هي S_3 حيث: $S_3 =]-1; \beta[\cup]-4; +\infty[$

4) كتابة معادلة لكل من (T) و (T')

$(T): y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ | $(T'): y = f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$

$(T): y = f(\alpha)$ | $(T'): y = f(\beta)$

لأن $\boxed{f'(\alpha)=0}$ | $\boxed{f'(\beta)=0}$

0,5 + 0,5

- $f(x) = \dfrac{-x^2-4x-4}{x+1}$

5) أ- حساب $f'(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(-2x-4)(x+1) - (-x^2-4x-4)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2x-\cancel{4x}-\cancel{4}+x^2+\cancel{4x}+\cancel{4}}{(x+1)^2}$$

فيكون $\boxed{f'(x) = \dfrac{-x^2-2x}{(x+1)^2}}$

0,75

ب- تعيين كل من α و β

لدينا: $f(\alpha)=0$ معناه: $\dfrac{-\alpha^2-4\alpha-4}{\alpha+1}=0$

اذن: $-(\alpha+2)^2=0$ و $\alpha \neq -1$

أي أن $\boxed{\alpha=-2}$

كذلك: $f(\beta)=-4$ معناه: $\dfrac{-\beta^2-4\beta-4}{\beta+1}=-4$

أي أن: $-\beta^2-4\beta-4=-4\beta-4$

فيكون: $-\beta^2=0$ أي $\boxed{\beta=0}$

0,5 + 0,5

6) $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ و $g(x)=-f(x)+1$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g (0,75)

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$g(x)$		↗	1	↘	‖	↘	5	↗	

$(g(-2)=-f(-2)+1$ و $g(0)=-f(0)+1)$

التمرين الثالث: "08 ن"

I- القراءة البيانية:

1) لدينا: $f(0)=0$ ؛ $f(\sqrt{3})=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

كذلك: $f'(\sqrt{3})=0$ و $f'(-\sqrt{3})=0$

(لأن f تقبل قيمة حدية محلية عند كل من $\sqrt{3}$ و $(-\sqrt{3})$)

0,25 × 4

2) جدول اشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$

0,5 + 0,5

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$			−		‖	+	0	−	‖		+		

II- $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ و $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

1) أ- اثبات أن: $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ (1)

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x(x^3)}{(x^2-1)^2}$$

أي: $f'(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$

وعليه: $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f (0,5)

اشارة $f'(x)$ من اشارة $x^2(x^2-3)$

$x^2=0$ معناه: $x=0$ و $x^2-3=0$ معناه $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

وعليه: f متزايدة تماما على المجال $[\sqrt{3};+\infty[$ وعلى المجال $]-\infty;-\sqrt{3}]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-\sqrt{3};-1[$ وعلى المجال $]-1;1[$ وعلى المجال $]1;\sqrt{3}]$

جدول التغيرات: (0,5)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↘	‖		↘		‖	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗	

$f(-\sqrt{3})=-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ و $f(\sqrt{3})=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

جـ- التحقق أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف مع تعيين احداثييها: (1)

لدينا: $f'(x)$ تنعدم من أجل $x=0$ ولا تغير اشارتها وعليه النقطة $A(0;f(0))$ نقطة انعطاف وبما أن $f(0)=0$ فإن: $A(0;0)$ أي A تنطبق على المبدأ O

4) تبيين أن المبدأ $O(0;0)$ مركز تناظر لـ (C_f)

0,5 3) تعيين أحسن تقريب تآلفي ل $f(x)$ بجوار 2 :

نعلم أن أحسن تقريب تآلفي ل $f(x)$ بجوار 2 يعطى بـ :

$$f(x) \simeq f'(2)(x-2)+f(2)$$

مع : $f'(2)=\frac{4}{9}$ و $f(2)=\frac{8}{3}$

إذن : $f(x)\simeq \frac{4}{9}x-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}$

أي : $f(x)\simeq \frac{4}{9}x+\frac{16}{9}$

0,5 استنتاج قيمة مقربة ل $f(1,999)$

$$f(1,999)\simeq \frac{4}{9}\times 1,999+\frac{16}{9}$$

إذن : $f(1,999)\simeq 2,666222222$

0,25 4) تبيين أن المبدأ $O(0,0)$ مركز تناظر ل (C_f) :

0,5 + 0,5 * من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا : $x\neq 1$ و $x\neq -1$ إذن : $-x\neq 1$ و $-x\neq -1$ أي $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

* كذلك من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لدينا :

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3}{x^2-1}=-f(x)$$

وعليه فإن f دالة فردية أي أن منحناها (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ $O(0;0)$

5) $h(x)=\frac{1}{f(x)}$ ، $D_h=\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$

0,5 أ- حساب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$:

h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$ ولدينا :

$$h'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

ب- جدول إشارة $h'(x)$:

0,5 إشارة $h'(x)$ عكس إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$h'(x)$		−	0	+	‖	+	‖	+	‖	+	0	−	

0,25 وعليه : الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\sqrt{3}]$ وعلى المجال $[\sqrt{3};+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]1;\sqrt{3}]$ وعلى المجال $]-1;1[$ وعلى المجال $[-\sqrt{3};-1[$

انتهى