

## اختبار الفصل الثالث

## التبرير الأول

كله أجب بصح أو خطأ مع التبرير:

1. إذا كان  $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD}$  فإن نسبة التحاكي  $h$  الذي مركزه  $I$  ويحول  $A$  إلى  $D$  هي  $k = 2$ .
2. إذا كان  $3\vec{BC} = \vec{AC}$  فإن صورة  $B$  بالتحاكي  $h$  الذي مركزه  $C$  ونسبته 3 هي  $A$ .
3.  $h$  تحاكي يرفق بكل نقطة  $M(x; y)$  النقطة  $M'(x'; y')$  حيث:  $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$ ، إحداثيات النقطة الصامدة هي  $\Omega(-1; 3)$ .

## التبرير الثاني

في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  نعتبر النقطتين  $A(2; 2)$ ،  $B(3; 0)$  والمستقيم  $(T): y = x - 2$

1. أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta)$  محور القطعة  $[OA]$ .
2. أكتب معادلة ديكارتية للدائرة  $(C)$  التي قطرها  $[OA]$ .
3. بين أن المستقيم  $(T)$  مماس للدائرة  $(C)$  ثم حدد إحداثيات نقطة التماس  $E$ .
4. بين أن النقطة  $B$  تقع خارج الدائرة  $(C)$ .
5. بين أن  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$  ثم استنتج قياسا للزاوية  $\hat{AOB}$ .
6. أحسب مساحة المثلث  $AOB$ .
7. عين مجموعة النقط  $M$  التي تحقق:  $MO^2 + MA^2 = 8$ .

## التبرير الثالث

1.  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = \frac{7u_n}{1+2u_n}$

أ- أحسب  $u_1$  و  $u_2$ .

ب- بين أن:  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(3-u_n)}{1+2u_n}$  ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  إذا علمت أن  $0 < u_n < 3$ .

2. لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \frac{u_n}{3-u_n}$

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 7$ .

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

ج- أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ ، ماذا تستنتج؟

3. أحسب المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$

(1) خطأ: النسبة هي  $k = -2$

التبرير:  $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AI} + \vec{ID}) = \frac{1}{3}\vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$

أي  $\frac{2}{3}\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{ID}$  أي  $-2\vec{IA} = \vec{ID}$  ومنه  $\vec{ID} = -2\vec{IA}$

(2) صح: صورة  $B$  بالتحاكي  $h$  الذي مركزه  $C$  ونسبته 3 هي النقطة  $A$

التبرير:  $3\vec{BC} = \vec{AC}$  أي  $\vec{CA} = 3\vec{CB}$

(3) خطأ: النقطة الصامدة هي  $\Omega(1; 2)$

التبرير:  $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x = -2x + 3 \\ y = -2y + 6 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

(1) معادلت المستقيم  $(\Delta)$

$\vec{OA}$  شعاع ناظمي إذن:  $(\Delta): (2)x + (2)y + c = 0$

المستقيم يشمل منتصف  $[OA]$  أي  $\omega(1, 1)$  إذن نبحث عن قيمة  $c$  بما أن  $\omega \in (\Delta)$  أي:  $2(1) + 2(1) + c = 0 \Rightarrow c = -4$

ومنه  $(\Delta): x + y - 2 = 0$  أو  $(\Delta): 2x + 2y - 4 = 0$

(2) معادلة الدائرة  $(C)$

لدينا المركز  $\omega(1, 1)$  ونصف القطر  $\frac{OA}{2} = r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

إذن معادلة الدائرة هي:  $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

(3) تبين أن  $(T)$  مماس لـ  $(C)$

نحسب المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم  $(T)$

$d(\omega, (T)) = \frac{|-x_0 + y_0 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|-(1) + 1(1) + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

إذن  $d(\omega, (T)) = \sqrt{2} = r$  ومنه  $(T)$  مماس لـ  $(C)$

نجد إحداثيات نقطة التماس  $E$ : أي إيجاد النقطة التقاطع أو التماس

بين  $(T)$  و  $(C)$  نحل جملة المعادلة:  $\begin{cases} y = x - 2 \dots\dots(1) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \dots\dots(2) \end{cases}$

بتعويض (1) في (2) نجد:  $(x-1)^2 + ((x-2)-1)^2 = 2$  بعد

التبسيط نجد:  $2x^2 - 8x + 8 = 0$  نبسط المعادلة نجد  $(x-2)^2 = 0$

أو نحل المعادلة بحساب المميز  $\Delta = 0$  إذن المعادلة تقبل حل

مضاعف  $x = 2$  بالتعويض في المعادلة رقم (1) نجد  $y = 0$  إذن

إحداثيات النقطة  $E(2, 0)$

(4) تبين أن النقط  $B$  تقع خارج الدائرة  $(C)$

نحسب المسافة  $\omega B = \sqrt{5} > r = \sqrt{2}$  إذن  $B$  تقع خارج الدائرة  $(C)$ .

(5) تبين أن:  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$

لدينا  $\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  و  $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  إذن  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$

نستنتج قس للزاوية  $\hat{AOB}$ :

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos(\hat{AOB}) = 6$

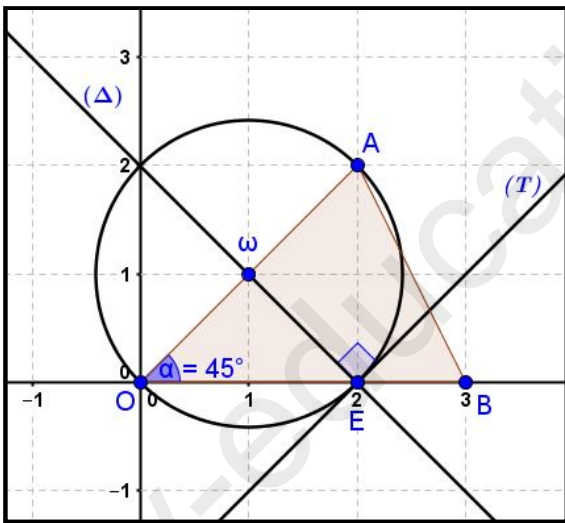
إذن:  $\cos(\hat{AOB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ومنه:  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$

(6) حساب مساحة المثلث  $AOB$ :

لدينا:  $\sin \hat{O} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$  أي  $S_{AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \hat{O}$

ومنه  $S_{AOB} = 3$



(7) تبين مجموعة النقط  $M$  التي تحقق:  $MO^2 + MA^2 = 8$

لدينا  $\omega(1, 1)$  منتصف  $[OA]$  إذن حسب مبرهنة المتوسط:

$2M\omega^2 + \frac{1}{2}OA^2 = 8$  أي  $MO^2 + MA^2 = 2M\omega^2 + \frac{1}{2}OA^2$

أي  $M\omega = \sqrt{2}$  إذن  $M\omega^2 = 2$  ومنه  $2M\omega^2 + \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 8$

وبالتالي فإن مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة  $\omega$  و

نصف قطرها  $\sqrt{2}$  أي هي الدائرة  $(C)$ .

ج- حساب بدالات  $n$  المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$

$$\text{عدد الحدود} = n + 2 = (n + 1) - 0 + 1$$

$$S_n = v_0 \times \left( \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \right) = 2 \left( \frac{7^{n+2} - 1}{7 - 1} \right) = \frac{7^{n+2} - 1}{3}$$



1/1- حساب  $u_1$  و  $u_2$ .

$$u_1 = \frac{7u_0}{1 + 2u_0} = \frac{7 \times 2}{1 + 2 \times (2)} = \frac{14}{5}$$

$$u_2 = \frac{7u_1}{1 + 2u_1} = \frac{7 \left( \frac{14}{5} \right)}{1 + 2 \left( \frac{14}{5} \right)} = \frac{98}{33}$$

ب- تبين أن:  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n}{1 + 2u_n} - u_n = \frac{7u_n - (u_n)(1 + 2u_n)}{1 + 2u_n}$$

$$= \frac{7u_n - u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{6u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$$

ك- نستنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

لدينا  $0 < u_n < 3$ :  $2u_n > 0$  و  $1 + 2u_n > 0$  لأن  $u_n > 0$

و  $(3 - u_n) > 0$  لأن  $u_n < 3$  إذن  $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$ .

2/1- تبين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسيّة

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3 - u_{n+1}} = \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{3 - \frac{7u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{3(1 + 2u_n) - 7u_n}{1 + 2u_n}}$$

$$= \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{3 + 6u_n - 7u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{7u_n}{3 - u_n} = 7 \times \frac{u_n}{3 - u_n} = 7v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $q = 7$  وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0}{3 - u_0} = \frac{2}{3 - 2} = 2$$

ب- كتابت  $(v_n)$  بدالات  $n$

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = 2 \times 7^n$$

ج- حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty \text{ لأن } q = 7 > 1 \text{ و } v_0 = 2 > 0$$

ك- نستنتج أن المتتالية  $(v_n)$  متباعدة.