الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية ساجي مختار – السمار   الموسم الدراسي: 2019/2018

الفرض الأول للفصل الثالث في الرياضيات

المستوى: 02 رياضيات   المدّة: $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-3n}{2n^2+2019}$ ساعة

مجموعة محفظة الرياضيات للتعليم بالجزائر

التمرين الأول:

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 و أساسها $q=3$ حيث : $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$

1. تأكد أن $216 = 6^3$ ثم أحسب u_2 ، إستنتج قيمة u_1
2. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة u_1
3. أحسب $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ $T_n = u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$
4. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كمايلي : $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$
   - أحسب v_2 ، v_3 ، v_4
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$
   - بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول w_1
   - أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n

التمرين الثاني:

نعتبر $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس للمستوي

لتكن (C) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث : $x^2+y^2-2x-4y+13-\alpha^2=0$ مع $(\alpha \in \mathbb{R})$

- أدرس حسب قيم α مجموعة النقط (C)
- نضع $\alpha = 4$

1. عين مركز Ω و نصف قطر للدائرة (C)
2. أدرس وضعية المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+7$ بالنسبة للدائرة (C)
3. عين إحداثيي النقطة B المسقط العمودي للنقطة Ω على المستقيم (Δ)
4. تحقق أن $d(\Omega;(\Delta)) = \Omega B$
5. أكتب معادلة المماس (T) للدائرة (C) عند النقطة $A(-1;4)$

الهدية : أوجد معادلة الدائرة تمر بالنقطتين $A(0,2)$ و $B(-1,0)$ و المستقيم ذو المعادلة $x+y-7=0$ مماس لها .

تصحيح الفرض الأول للفصل الثالث في مادة الرياضيات

حـل التمرين 1

لتكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 و أساسها $q=3$ حيث : $u_1\times 2u_2\times u_3=432$

1 • حساب u_2

لدينا: $u_1\times 2u_2\times u_3=432$ تكافئ $u_1\times u_2\times u_3=216$ تكافئ $u_2^3=216$ ومنه $u_2=6$

• حساب u_1 : $u_1=\dfrac{u_2}{q}=\dfrac{6}{3}=2$

2 كتابة عبارة حد العام لـ u_n : $u_n=u_p\times q^{n-p}=u_1\times q^{n-1}=2\times 3^{n-1}$

3 حساب المجموع S_n و الجداء T_n

حساب S_n : $S_n=u_1+u_2+...+u_n=u_1\times\dfrac{1-3^{n-1+1}}{1-3}=2\times\dfrac{1-3^n}{-2}$ تكافئ $S_n=3^n-1$

حساب T_n : $T_n=u_1\times u_2\times ...\times u_n=(u_1)\times(u_1\times q)\times(u_1\times q^2)\times\cdots\times(u_1\times q^{n-1})$

تكافئ $T_n=\underbrace{(u_1\times u_1\times\cdots\times u_1)}_{\text{n مرة}}\times\left(q\times q^2\times\cdots\times q^{n-1}\right)$

تكافئ $T_n=u_1^n\times q^{1+2+\cdots+n-1}$ تكافئ $T_n=u_1^n\times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4 (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كمايلي : $\begin{cases} v_1=2\\ v_{n+1}=\dfrac{3}{2}v_n+u_n\end{cases}$

• حساب v_2 ، v_3 ، v_4

• $v_2=\dfrac{3}{2}v_1+u_1=\dfrac{3}{2}\times 2+2=5$

• $v_3=\dfrac{3}{2}v_2+u_2=\dfrac{3}{2}\times 5+6=\dfrac{27}{2}$

• $v_4=\dfrac{3}{2}v_3+u_3=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{27}{2}+18=\dfrac{153}{4}$

5 نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n=\dfrac{v_n}{u_n}-\dfrac{2}{3}$

• تبيان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول w_1

$w_{n+1}=\dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\dfrac{2}{3}$ تكافئ $w_{n+1}=\dfrac{\frac{3}{2}v_n+u_n}{3\times u_n}-\dfrac{2}{3}$ تكافئ $w_{n+1}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{v_n}{3\times u_n}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}$ تكافئ $w_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{v_n}{u_n}-\dfrac{1}{3}$

تكافئ $w_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_n}{u_n}-\dfrac{2}{3}\right)$

$w_{n+1}=\dfrac{1}{2}w_n$ ومنه w_n متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $w_1=\dfrac{v_1}{u_1}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

• كتابة w_n بدلالة n

$w_n=w_1\times q^{n-1}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

• إستنتاج v_n بدلالة n

$v_n=w_n\times u_n+\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\left(2\times 3^{n-1}\right)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}+1\right)$

نعتبر $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي

لتكن (C) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث : $x^2+y^2-2x-4y+13-\alpha^2=0$ مع $(\alpha\in\mathbb{R})$

• دراسة حسب قيم α مجموعة النقط (C)

$x^2+y^2-2x-4y+13-\alpha^2=0$ تكافئ $(x-1)^2+(y-2)^2=\alpha^2-8$

جدول إشارة α^2-8

α	$-\infty$		$-\sqrt{8}$		$\sqrt{8}$		$+\infty$
α^2-8		+	0	−	0	+	

• من أجل $\alpha=\{-\sqrt{8},\sqrt{8}\}$ مجموعة النقط (C) هي النقطة $\Omega(1;2)$

• من أجل $\alpha\in\left]-\infty;-\sqrt{8}\right[\cup\left]\sqrt{8};+\infty\right[$ مجموعة النقط (C) هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{\alpha^2-8}$

• من أجل $\alpha\in\left]-\sqrt{8};\sqrt{8}\right[$ مجموعة النقط (C) هي مجموع خالية

نضع $\alpha=4$

1 (C) هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;2)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{4^2-8}=\sqrt{8}$ $\qquad (C):(x-1)^2+(y-2)^2=\sqrt{8}$

2 دراسة وضعية المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+7$ بالنسبة للدائرة (C)

$d(\Omega,\Delta)=\dfrac{|1+2-7|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{8}=r$ إذن (Δ) مماس للدائرة (C)

3 تعيين إحداثيي النقطة $B(x_B,y_B)$ المسقط العمودي للنقطة Ω على المستقيم (Δ)

النقطة B تنتمي إلى (Δ) ومنه $x_B+y_B-7=0$

ونعلم أن $\overrightarrow{\Omega B}\cdot\vec{u}=0$ حيث $\vec{u}(1,-1)$ شعاع توجيه لـ (Δ)، إذن $\overrightarrow{\Omega B}\cdot\vec{u}=(x_B-1)-(y_B-2)=0$

نحل الجملة $\begin{cases}x_B+y_B-7=0\\ x_B-y_B+1=0\end{cases}$ نجد $x=3$ و $y=4$ ومنه $B(3,4)$

4 التحقق أن $d(\Omega;(\Delta))=\Omega B$: $\Omega B=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=d(\Omega;(\Delta))$

5 كتابة معادلة المماس (T) للدائرة (C) عند النقطة $A(-1;4)$

معادلة مماس (T) من شكل $(T):ax+by+c=0$ حيث $\overrightarrow{\Omega A}(-2,2)$ شعاع ناظيمي له إذن: $(T):-2x+2y+c=0$

ونعلم أن $A\in(T)$ إذن $2+8+c=0$ ومنه $c=-10$ ، إذن $(T):-2x+2y-10=0$

الهـدية:

إيجاد معادلة الدائرة تمربالنقطتين $A(0,2)$ و $E(-1,0)$ و المستقيم ذو المعادلة $x+y-7=0$ مماس لها .

ليكن $E(x_0,y_0)$ مركز الدائرة ومنه $\begin{cases}(x_0-0)^2+(y_0-2)^2=r^2\\(x_0+1)^2+(y_0-0)^2=r^2\\\dfrac{|x_0+y_0-7|}{\sqrt{2}}=r\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}x_0^2+y_0^2-4y_0+4=r^2 & (1)\\x_0^2+y_0^2+2x_0+1=r^2 & (2)\\\dfrac{|x_0+y_0-7|}{\sqrt{2}}=r\end{cases}$

$(1)-(2)$ تكافئ $2x_0+4y_0-3=0$ تكافئ $x_0=-2y_0+\frac{3}{2}$

بتعويض $x_0=-2y_0+\frac{3}{2}$ و $\frac{|x_0+y_0-7|}{\sqrt{2}}=r$ في (1) نجد $(-2y_0+\frac{3}{2})^2+y_0^2-4y_0+4=\dfrac{(-2y_0+\frac{3}{2}+y_0-7)^2}{2}$

تكافئ: $4y_0^2+\frac{9}{4}-6y_0+y_0^2-4y_0+4=\dfrac{\left(\frac{11}{2}+y_0\right)^2}{2}$ تكافئ: $10y_0^2-20y_0+\frac{25}{2}=y_0^2+11y_0+\frac{121}{4}$

تكافئ: $9y_0^2-31y_0-\frac{71}{4}=0$ $\quad\Delta=31^2-4\times\frac{-71}{4}\times 9=1600>0\quad \sqrt{\Delta}=40$

تكافئ:

- $y_0=\frac{31+40}{18}=\frac{71}{18}$ و $x_0=-\frac{71}{9}+\frac{3}{2}=\frac{-115}{18}$ و $r_1=\dfrac{\left|\frac{71}{18}-\frac{115}{18}-7\right|}{\sqrt{2}}=\frac{170}{18\sqrt{2}}$ $\qquad \left(x+\frac{115}{18}\right)^2+\left(y-\frac{71}{18}\right)^2=\left(\frac{170}{18\sqrt{2}}\right)^2$
- $y_0=\frac{31-40}{18}=-\frac{1}{2}$ و $x_0=\frac{5}{2}$ و $r_2=\dfrac{\left|\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-7\right|}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$ $\qquad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$