

اختبار دورة جـوان الاستدراكية في مادة الرياضيات

**التمرين الأول: (07 نقاط)**

لتكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كما يلي:  $u_0 = -1$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(1) أحسب الفرق:  $u_{n+1} - u_n$  بدلالة  $u_n$

(2) إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n < 3$ ، استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$

(3) لتكن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = -u_n + 3$

أ - بين أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$

ب - أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

ت - أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$  ثم  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

ث - أحسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$  ثم استنتج المجموع:  $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$

**التمرين الثاني: (05 نقاط)**

المستوي مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . تعطى الوحدة بالـ:  $cm$  و لدينا:  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$

نعتبر  $(\Gamma)$  الدائرة التي مركزها  $\Omega(5; -2)$  و نصف قطرها  $R = 5$

(1) أكتب معادلة ديكارتية للدائرة  $(\Gamma)$  ثم تحقق أن النقطة  $A(2; 2)$  تنتمي إلى هذه الدائرة.

(2) أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم  $(\Delta)$ ، مماس الدائرة  $(\Gamma)$  عند النقطة  $A$

(3) استنتج معادلة ديكارتية للدائرة  $(\Gamma')$ ، صورة الدائرة  $(\Gamma)$  بالتحاكي  $h$  الذي مركزه النقطة  $O$  و نسبته  $k = -\frac{2}{5}$

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x^2 + 3x - 2$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 - أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2 - أحسب  $f'(x)$  و أدرس إشارتها.

3 - شكل جدول تغيرات الدالة  $f$

4 - أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 1$

5 - عين نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع محوري الإحداثيات ثم أرسم كلا من  $(T)$  و  $(C_f)$ .

**التمرين الثالث: (03 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

لتكن النقط  $A(1; 3; -2)$ ،  $B(-5; 2; 2)$  و  $C(3; 4; 3)$

1 - أكتب معادلات المستقيم  $(AB)$  أو تمثيلا وسيطيا له.

2 - أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة التي قطرها  $[BC]$ .

3 - هل الأشعة  $\vec{AB}$ ،  $\vec{AC}$  و  $\vec{k}$  من نفس المستوي؟ برر إجابتك.

انتهى نص الاختبار

عطلة سعيدة لأبنائنا الأعزاء، عيد فطر سعيد و بالتوفيق للجميع.

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
		<b>التمرين الأول: (07 نقاط)</b>
	01	(1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2$
	01	(2) بما أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n < 3$ ، فإن $-\frac{2}{3}u_n + 2 > -\frac{2}{3}(3) + 2$ و منه:
	01	$u_{n+1} - u_n > 0$ ، و هكذا فإن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ .
	01	(3) لدينا $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = -u_n + 3$
	01	أ - لدينا: $v_n = \frac{1}{3}(-u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$ و بالتالي $v_{n+1} = -u_{n+1} + 3 = -\frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = -\frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}v_n$
	01	$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = -u_0 + 3 = -(-1) + 3 = 4$
07	01	ب - من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $v_n = v_0 \times q^{n-0} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
	01	و منه: $u_n = -v_n + 3 = -4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$
	0.5	ت - بما أن: $\frac{1}{3} \in ]-1; 1[$ ، فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$
	0.5	و منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = -4 \times (0) + 3 = 3$
		<b>التمرين الثاني: (05 نقاط)</b>
	01	(1) لدينا: $(\Gamma): (x-5)^2 + (y+2)^2 = (5)^2$
	01	و يمكن أن نكتب أيضا: $(\Gamma): x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$
	01	ولكن: $(2-5)^2 + (2+2)^2 = (5)^2$ و منه: $A \in (\Gamma)$
	01	(2) لدينا: $A(2;2)$ و $A\Omega(3;-4)$ كما أن المستقيم $(\Delta)$ يشمل $A$ و $\overrightarrow{\Omega A}$ شعاع
05	01	ناظمي له. إذن من أجل كل نقطة $M(x;y)$ من $(\Delta)$ لدينا: $\overrightarrow{AM}(x-2; y-2)$
	01	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ و بتوظيف العبارة التحليلية للجداء السلمي نجد: $3(x-2) - 4(y-2) = 0$
	01	و بعد التبسيط نحصل على معادلة ديكارتية للمستقيم $(\Delta)$ كما يلي:
	01	$(\Delta): 3x - 4y + 2 = 0$
	0.5	(3) لدينا: $\overrightarrow{O\Omega} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{O\Omega}$ و بالتالي: $\Omega'(-2; \frac{4}{5})$ و من جهة أخرى:
	01.5	إذن: $R' = \left  -\frac{2}{5} \right  \times R = 2$ و $(\Gamma'): (x+2)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = (2)^2$

التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

01

1 حساب النهايات: .....

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

0.5

2 من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f'(x) = 2x + 3$  و بالتالي: .....

$x$	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

0.5

3 - جدول التغيرات: .....

$x$	$-\infty$	$-3/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-17/4$	$+\infty$

05

4 - لدينا:  $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$  و منه:  $(T): y = 3(x-3) + 2$  و بعد التبسيط

01

نجد:  $(T): y = 5x - 3$  .....

5 - التقاطع مع محوري الإحداثيات:

المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في النقطتين اللتين فاصلتهما:  $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$  و  $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

0.5

لأن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلها كحلين .....

0.5

المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الترتيب في النقطة التي ترتيبها  $-2$  لأن:  $f(0) = -2$  .....

01

رسم المنحنى  $(C_f)$  و المماس  $(T)$  .....



التمرين الرابع: (03 نقاط)

1 - المستقيم (AB) يشمل النقطة  $A(1;3;-2)$  و  $\overline{AB}(-6;-1;4)$  شعاع ناظمي له.

01

$$\text{و بالتالي: } (AB): \begin{cases} x=1-6t \\ y=3-t \\ z=-2+4t \end{cases} \text{ حيث } t \in \mathbb{R}$$

كما أن معادلات هذا المستقيم تعطى بـ:  $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{4}$

2 - سطح الكرة التي قطرها [BC] يكون مركزها النقطة  $\omega(-1;3;\frac{5}{2})$  منتصف [BC]

$$\text{و نصف قطرها } r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{69}}{2}$$

و بالتالي:

01

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{69}}{2}\right)^2$$

03

3 - لنبحث عن عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث يكون:  $\vec{k} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$

$$\begin{cases} 0 = -6\alpha + 2\beta \\ 0 = -\alpha + \beta \\ 1 = 4\alpha + 5\beta \end{cases} \text{ بعبارة أخرى لنحل الجملة:}$$

باستعمال طريقة الجمع و التعويض

من المعادلة الثانية نلاحظ أن:  $\alpha = \beta$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد:  $\alpha = 0$

بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد:  $\beta = \frac{1}{5}$

و هذا تناقض لأن  $\alpha = \beta$

01

إذن الجملة لا تقبل حولا و منه الأشعة  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  و  $\vec{k}$  ليست من نفس المستوي.

من إعداد الأستاذ: مراحي لزهر