الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: 2024

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: ( 04 نقاط )

يحتوي كيس على 11 كريّة متماثلة لا نفرّق بينها باللمس موزعة كما يلي: كريّتان بيضاوان مرقمتان بـ: 1 ، 3 وأربع كريّات حمراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 3 وخمس كريّات خضراء مرقمة بـ: 0 ، 1 ، 1 ، 3 ، 4

I ) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريّات من الكيس ونعتبر الحوادث الآتية:

$A$ : " الحصول على 3 كريّات من نفس اللون " ، $B$ : " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها عدد فردي "

$C$ : " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها عدد زوجي "

1) أ) احسب $P(A)$ احتمال الحادثة $A$ و بيّن أنّ: $P(B)=\frac{56}{165}$ ثمّ استنتج $P(C)$

ب) احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$

2) $X$ المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريّات، عدد الكريّات التي تحمل رقما زوجيا.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

ب) احسب احتمال الحادثة $(X>1)$

II ) نسحب الآن من الكيس عشوائيا 3 كريّات على التوالي وبدون إرجاع.

– احسب احتمال الحادثة $D$ : " الحصول على 3 كريّات جُداء أرقامها معدوم "

### التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ الآتية:

$$\left(z-1+2\sqrt{3}\right)\left[z^2-2\left(1-\sqrt{3}\right)z+5-2\sqrt{3}\right]=0$$

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب $z_A$ ، $z_B$ و $z_C$ حيث: $z_A=1-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=1-2\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_A}$

1) اكتب كلّا من $z_A-1$ ، $z_C-1$ و $z_B$ على الشّكل المثلثي.

2) جِد لاحقة النقطة $D$ مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$

3) بيّن أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن.

**التمرين الثالث: ( 05 نقاط )**

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\dfrac{4-u_n}{2+u_n}$

**1)** احسب الحدود $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ ثمّ برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $0\le u_n\le 2$

**2)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+4}$

أ) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $-\dfrac{2}{3}$ ثمّ اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$

ب) بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $u_n=\dfrac{5}{1-v_n}-4$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

**3)** من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، نضع:

$$S_n=v_n+v_{n+1}+\cdots+v_{n+2024} \quad \text{و} \quad T_n=\frac{1}{4+u_n}+\frac{1}{4+u_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{4+u_{n+2024}}$$

– احسب $S_n$ بدلالة $n$ ثمّ استنتج $T_n$ بدلالة $n$

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط )**

**I)** يُمثّل الجدول المقابل تغيّرات الدّالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x\,e^{-x+1}-2$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ | $-2$ |

– احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$

**II)** $f$ الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x+3-x\,e^{-x+1}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (وحدة الطول $2cm$).

**1)** أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ب) بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$

ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$

**2)** أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=g(x)-e^{-x+1}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

**3)** بيّن أنّ $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ موازيا لـ $(\Delta)$ ، يُطلب تعيين معادلة له.

**4)** أ) ارسم $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=-2x+m$ حلّين مختلفين.

**5)** أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^1 x\,e^{-x+1}\,dx=e-2$

ب) استنتج بالسنتيمتر المربع $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ $(C_f)$ و $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=1$

**انتهى الموضوع الأول**

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 قطع كهربائية غير متمايزة ولا نفرق بينها باللمس، منها 3 قطع سليمة وقطعتان غير سليمتين.

نرمز إلى القطعة السليمة بالرّمز $S$ وإلى القطعة غير السليمة بالرّمز $\overline{S}$

نسحب عشوائيا من الكيس 3 قطع على التوالي مع الإرجاع ، ونعتبر الحوادث:

$A$ : " القطعة الأولى المسحوبة سليمة " ، $B$ : " سحب قطعة واحدة فقط سليمة "

$C$ : " القطعة الثالثة المسحوبة سليمة "

1) شكّل شجرة الاحتمالات التي تُنمذج هذه التجربة.

2) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحادثتين $A$ و $B$ ثمّ بيّن أنّ: $P(C)=\frac{3}{5}$

3) احسب الاحتمال الشرطي $P_C(A)$ ، هل الحادثتان $A$ و $C$ مستقلتان ؟

4) نُرفق بكل قطعة سليمة العدد 10 وبكل قطعة غير سليمة العدد $-10$ ، ونعتبر $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب من الكيس لثلاث قطع مجموع الأعداد المرفقة بها.

أ) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي $X$ هي: $-30$ ، $-10$ ، 10 ، 30

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي $X$ ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

## التمرين الثاني: (04 نقاط)

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة مما يلي:

1) $z$ عدد مركب مرافقه $\overline{z}$ ، مرافق العدد المركب $z+i$ هو:

أ) $\overline{z}-i$ ب) $\overline{z}+i$ جـ) $z-i$

2) العدد المركب $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2024}$ يساوي: أ) $1$ ب) $i$ جـ) $-1$

3) $z$ عدد مركب حيث $z=2\left(1+i\sqrt{3}\right)$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، نضع: $S_n=\ln|z|+\ln|z|^2+\dots+\ln|z|^n$ ، لدينا:

أ) $S_n=(n+1)^2\ln 2$ ب) $S_n=n(n+1)\ln 2$ جـ) $S_n=2\left(\frac{1-(2\ln 2)^n}{1-2\ln 2}\right)\ln 2$

4) $z$ عدد مركب حيث: $z=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$ ، الشّكل المثلثي للعدد المركب $z$ هو:

أ) $-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ ب) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$ جـ) $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$

## التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) $f$ الدّالة العددية المعرّفة على المجال $[2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x+1}{2x}$

– شكّل جدول تغيرات الدّالة $f$ ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ $x$ من $[2;+\infty[$ فإنّ $\frac{1}{2}<f(x)\leq\frac{3}{4}$

2) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي $n$ ، $n\geq 2$ بـ : $u_n=\frac{n}{2^n}$

أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ $n$ من $\mathbb{N}$ ، $n\geq 2$ فإنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{3}{4}$

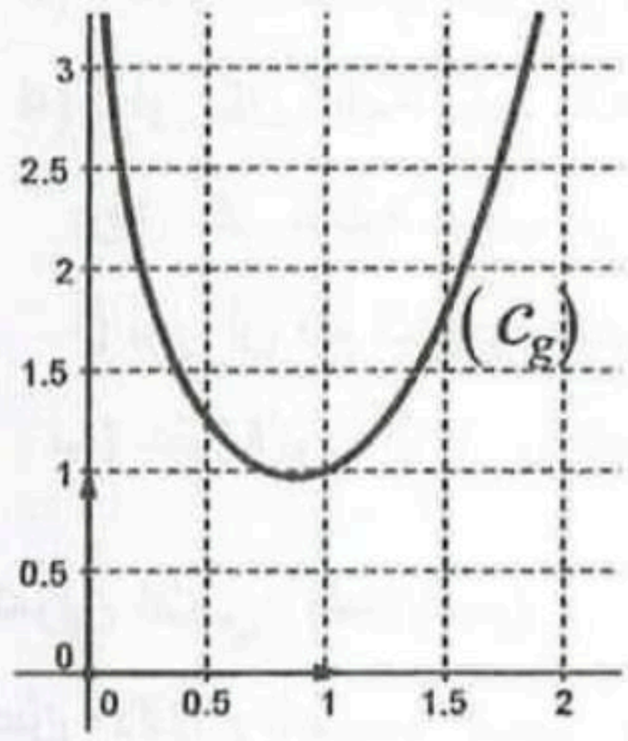
ب) أثبت أنّه: من أجل كلّ $n$ من $\mathbb{N}$ ، $n\geq 2$ فإنّ $u_n\leq\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

جـ) نضع من أجل كلّ $n$ من $\mathbb{N}$ ، $n\geq 2$ : $S_n=\frac{u_2}{2}+\frac{u_3}{3}+\dots+\frac{u_n}{n}$

– بيّن أنّ: $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$ ثمّ عيّن العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $S_n=\frac{511}{1024}$

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

I) $g$ الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}-\ln x$ ، $(C_g)$ تمثيلها البياني كما في الشّكل.




– بقراءة بيانية ، عيّن إشارة $g(x)$

II) $f$ الدّالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x-\frac{\ln x}{x^2}$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، ( وحدة الطول $2cm$).

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$

2) أ) بيّن أنّه من أجل كلّ $x$ من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\frac{-2g(x)}{x^3}$

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

جـ) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7<\alpha<0,71$

3) أ) بيّن أنّ المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ ، يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$

4) بيّن أنّ المنحني $(C_f)$ يقبل مماسا $(T)$ معامل توجيهه $-1$ ، يطلب تعيين معادلة له.

5) أ) ارسم كلّا من $(\Delta)$ ، $(T)$ و $(C_f)$

ب) $m$ وسيط حقيقي، عيّن بيانيا قيم $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة: $\frac{\ln x}{x^2}=m$ حلّين مختلفين.

6) أ) أثبت أنّ الدّالة $H:x\mapsto\frac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدّالة $h:x\mapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على $]0;+\infty[$

ب) $\mathcal{A}(\alpha)$ المساحة بالسنتيمتر المربع للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y=-x$ ، $x=\alpha$ ، $x=1$

– بيّن أنّ: $\mathcal{A}(\alpha)=4\left(\alpha^2-\frac{1}{\alpha}+1\right)$

**انتهى الموضوع الثاني**