اختبارات نموذجية في الرياضيات

السنة الأولى ثانوي

جذع مشترك علوم وتكنولوجيا

ستة وثلاثون اختبارا نموذجيا

مع حلولها المفصلة

ملخصات هامة لجميع الدروس

الطبعة الثانية 2022

عبد الكريم واضحي

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ فَلَمَّا رَءَاهُ مُسۡتَقِرًّا عِندَهُۥ قَالَ هَٰذَا مِن فَضۡلِ رَبِّي لِيَبۡلُوَنِيٓ ءَأَشۡكُرُ أَمۡ أَكۡفُرُۖ
وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشۡكُرُ لِنَفۡسِهِۦۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّي غَنِيّٞ كَرِيمٞ ٤٠ ﴾
﴿ رَبِّ أَوۡزِعۡنِيٓ أَنۡ أَشۡكُرَ نِعۡمَتَكَ ٱلَّتِيٓ أَنۡعَمۡتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَٰلِدَيَّ وَأَنۡ أَعۡمَلَ صَٰلِحٗا
تَرۡضَىٰهُ وَأَصۡلِحۡ لِي فِي ذُرِّيَّتِيٓۖ إِنِّي تُبۡتُ إِلَيۡكَ وَإِنِّي مِنَ ٱلۡمُسۡلِمِينَ ١٥ ﴾

الإهداء

إلى جميع تلاميذ السنة الأولى ثانوي

أهدي هذا الكتاب ، آملا أن يكون

خير معين لهم في دراستهم

عبد الكريم واضحي

مقدمة

بعد صدور الجزءين الأولين ضمن سلسلة "اختبارات نموذجية في الرياضيات" والخاصين بالمستويين الرابعة متوسط والثالثة ثانوي، يسرّني أن أضع بين يدي إخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة الجزء الثالث من هذه السلسلة والخاص بالسنة الأولى ثانوي جذع مشترك علوم وتكنولوجيا، حيث يشمل هذا الكتاب على ثلاثين اختبار نموذجي موزّعة على الفصول الثلاثة مع حلولها المفصّلة، بالإضافة إلى ملخصات هامّة لجميع دروس الرياضيات المبرمجة خلال هذه السنة الدراسية.

لقد كان الدافع لإصدار هذا الكتاب هو تقديم يد المساعدة لأبنائنا الطلبة في بداية المرحلة الثانوية التي تشكل هاجسا كبيرا للطلبة ولأوليائهم على حد سواء نظرا للصعوبات التي يواجهونها خلال هذه السنة بسبب الاختلاف النوعي في المواضيع وكذا نوعية الأسئلة التي تُطرح في الفروض والاختبارات، ممّا يسبب تراجعا نسبيا في النتائج المحصلة مقارنة مع نتائج السنة الرابعة متوسط. ولا شك أنّ هذه المرحلة (مرحلة التعثر وفقدان المعالم) سرعان ما يتجاوزها الطالب إذا أخذنا بيده وقمنا بتوجيهه التوجيه الصحيح وسرنا معه خطوة خطوة على درب النجاح والتفوّق حتى يستعيد نتائجه المتميزة التي تعوّد عليها في المرحلة المتوسطة، ويبدأ حينها مشواره الدراسي الجديد على قواعد صلبة وأسس متينة ترشحه مع نهاية السنة الثالثة من تحقيق نتائج متميزة في شهادة امتحان البكالوريا كما حققها من قبل في شهادة التعليم المتوسط.

ولمواصلة هذه المسيرة الطيبة، سيصدر قريبا بإذن الله الجزء الرابع من هذه السلسلة والخاص بالسنة الثانية ثانوي، والذي أرجو من الله العليّ القدير أن يضع له القبول بين إخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة الذين أناشدهم إفادتي بما جادت به قريحتهم من نصح وتوجيه أو نقد وتصحيح، فالخطأ قدر محتوم لبني البشر ويأبى الله العصمة إلا لرسوله ﷺ.

عبد الكريم واضحي

ملاحظات هامة
وقواعد أساسية
في الرياضيات

بقدر الكدّ تكتسب المعالي

ومن طلب العلا سهر الليالي

ومن طلب العلا من غير كدّ

أضاع العمر في طلب المحال

قواعد أساسية في الرياضيات

1) الأعداد والحساب

المجموعات

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$: 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، ...
- مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية $\mathbb{Z}$: ... ، 3- ، 2- ، 1- ، 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، ...
- مجموعة الأعداد العشرية $\mathbb{D}$: $\left(\frac{P}{10^n}\right)$: $2{,}75 = \frac{275}{10^2}$; $-\frac{7}{10}$; $\frac{11}{20} = \frac{11}{2^2\times 5}$; $\frac{3}{50} = \frac{3}{2\times 5^2}$
- مجموعة الأعداد الناطقة $\mathbb{Q}$: $\left(\frac{P}{q}\right)$: $-\frac{2}{3}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{1}{300}$; ...
- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}$; π ; ...

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

خواص القوى الصحيحة

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} ; (a\times b)^m = a^m \times b^m ; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ; (a^m)^n = a^{m\times n} ; a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

مثال :

$$a = \frac{(-2)^3 \times (2^2)^{-1} \times (-2)^2}{(2^5)^3 \times 2^{-4}} = -\frac{2^3 \times 2^{-2} \times 2^2}{2^{15} \times 2^{-4}} = -\frac{2^3}{2^{11}} = -2^{3-11}$$
$$= \boxed{-2^{-8}}$$

$$b = \frac{12^3 \times 20^{-2} \times (7^2)^3}{(14^2)^{-3} \times 9^2} = \frac{(2^2\times 3)^3 \times (2^2 \times 5)^{-2} \times (7^2)^3}{(2^2 \times 7^2)^{-3} \times (3^2)^2}$$
$$= \frac{2^6 \times 3^3 \times 2^{-4} \times 5^{-2} \times 7^6}{2^{-6} \times 7^{-6} \times 3^4} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 5^{-2} \times 7^6}{2^{-6} \times 3^4 \times 7^{-6}}$$
$$= 2^8 \times 3^{-1} \times 5^{-2} \times 7^{12} = \boxed{\frac{2^8 \times 7^{12}}{3 \times 5^2}}$$

خواص الجذور التربيعية

من أجل a و b موجبان :

$$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a ; \sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b} ; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} (b \neq 0) ; \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

مثال : احسب كلا من A^2 ، B^2 ، $A \times B$ ، $\frac{1}{A}$ ، $\frac{2}{B}$ ، حيث :

$$A = \sqrt{5} + 2\sqrt{3} ; B = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$A^2=\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\left(\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}\right)$$
$$=5+12+4\sqrt{15}=\boxed{17+4\sqrt{15}}$$
$$B^2=\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\left(3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}\right)$$
$$=27+8-12\sqrt{6}=\boxed{35-12\sqrt{6}}$$
$$A\times B=\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=\boxed{3\sqrt{15}-2\sqrt{10}+18-4\sqrt{6}}$$
$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{5-12}=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{-7}=\boxed{\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{7}}$$
$$\frac{2}{B}=\frac{2}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\frac{2(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})}=\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{27-8}=\boxed{\frac{6\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{19}}$$

<u>تعيين الأعداد العشرية من بين الأعداد الناطقة</u>

لمعرفة إن كانت الأعداد التالية عشرية ، نختزلها أولا ثمّ نحلّل المقام إلى جداء عوامل أوّليّة ، فإن كانت هذه العوامل 2 أو 5 فقط ، كان العدد عشريا وإلا فهو ناطقا.

$$\frac{35}{98}=\frac{5}{14}=\frac{5}{2\times\underline{\mathbf{7}}}\Rightarrow\boxed{\frac{35}{98}\in\mathbb{Q}}\,;\frac{21}{4200}=\frac{1}{200}=\frac{1}{2^3\times5^2}\Rightarrow\boxed{\frac{21}{4200}\in\mathbb{D}}$$
$$-\frac{33}{90}=-\frac{11}{30}=-\frac{11}{2\times\underline{\mathbf{3}}\times5}\Rightarrow\boxed{-\frac{33}{90}\in\mathbb{Q}}\,;\frac{15}{280}=\frac{3}{56}=\frac{3}{2^3\times\underline{\mathbf{7}}}$$
$$\Rightarrow\boxed{\frac{15}{280}\in\mathbb{Q}}$$

<u>الانتقال من الكتابة العشرية إلى الكتابة الكسرية</u>

<u>مثال 1:</u> $A=1,\underline{54}\,54\ \dots$

نضع : $x=0{,}54\,54\ \dots$ ، منه : $A=1+x$

$$100x=54{,}54\,54\ \dots=54+0{,}54\,54\ \dots=54+x$$
$$\Rightarrow 99x=54\Rightarrow x=\frac{54}{99}=\frac{6}{11}$$
$$A=1+x=1+\frac{6}{11}\Rightarrow\boxed{A=\frac{17}{11}}$$

مثال 2: $B = 34,1\underline{456}\ 456\ \ldots$ ، منه : $10B = 341,456\ 456\ \ldots$

نضع : $x = 0,456\ 456\ \ldots$ ، منه : $10B = 341 + x$

$$1000x = 456,456\ \ldots = 456 + 0,456\ \ldots = 456 + x$$

$$\Rightarrow 999x = 456 \Rightarrow x = \frac{456}{999} = \frac{152}{333}$$

$$10B = 341 + x = 341 + \frac{152}{333} = \frac{113705}{333} \Rightarrow \boxed{B = \frac{113705}{3330} = \frac{22741}{666}}$$

ملاحظة :

- إذا كان الدور مكوّنا من رقمين فإنّ $x = \frac{\text{الدور}}{99}$ ، أمّا إذا كان مكوّنا من ثلاثة أرقام فإنّ $x = \frac{\text{الدور}}{999}$ ، ...
- إذا كان الجزء العشري يشتمل على رقم لا ينتمي إلى الدور ، نضرب العدد في 10 حتى ننقل هذا الرقم إلى الجزء الصحيح ونحتفظ فقط بالدور في الجزء العشري (مثال 2)

<u>الكتابة العلمية لعدد عشري</u>

$$\underbrace{0,00768}_{\text{إزاحة الفاصلة نحو اليمين}} = 7,68 \times \underbrace{10^{-3}}_{\text{قوّة سالبة}} \quad ; \quad \underbrace{234,51}_{\text{إزاحة الفاصلة نحو اليسار}} = 2,3451 \times \underbrace{10^{2}}_{\text{قوّة موجبة}}$$

<u>رتبة مقدار عدد</u>

لتعيين رتبة مقدار عدد ، نكتبه على الشكل العلمي ثمّ ندوّره إلى الوحدة.

العدد	الكتابة العلمية	رتبة مقدار
$0,00768$	$7,68 \times 10^{-3}$	8×10^{-3}
$234,51$	$2,3451 \times 10^{2}$	2×10^{2}

<u>2) الترتيب في $\mathbb{R}$</u>

تتغيّر المتراجحة في أربع حالات هي :

1. **الضرب في عدد سالب** : $2 < 3 \Rightarrow \underbrace{2(-2)}_{-4} > \underbrace{3(-2)}_{-6}$
2. **القسمة على عدد سالب** : $3 < 9 \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{-3}}_{-1} > \underbrace{\frac{9}{-3}}_{-3}$
3. **القلب** : $2 < 4 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}}_{0,5} > \underbrace{\frac{1}{4}}_{0,25}$
4. **تربيع عددين سالبين** : $-6 < -5 \Rightarrow \underbrace{(-6)^2}_{36} > \underbrace{(-5)^2}_{25}$

قواعد الحصر :

- $\begin{cases} a \le b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow ac \le bc$
- $\begin{cases} a \le b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow ac \ge bc$
- $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$
- $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd$ (d, c, b, a أعداد حقيقية موجبة)

لحصر $a-b$ ، نحصر a و $-b$ ، ثمّ نجمع الطرفين $a+(-b)$. **حذار من طرح $\boldsymbol{a-b}$**

لحصر $\frac{a}{b}$ ، نحصر a و $\frac{1}{b}$ ، ثمّ نضرب الطرفين $a\left(\frac{1}{b}\right)$. **حذار من قسمة $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$**

مثال :

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \ ; \ \frac{1}{3} < y < \frac{2}{3}$$

اعط حصرا لكل من : $2x$; $-2x$; $3y$; $-3y$; $2x+3y$; $2x-3y$; $\frac{1}{3y}$; $\frac{2x}{3y}$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \xrightarrow[\text{نضرب طرفي المتراجحة في 2}]{} \boxed{1 < 2x < 5} \xrightarrow[\text{نضرب طرفي المتراجحة في } (-1)]{} \boxed{-5 < -2x < -1}$$

$$\frac{1}{3} < y < \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{نضرب طرفي المتراجحة في 3}]{} \boxed{1 < 3y < 2} \xrightarrow[\text{نضرب طرفي المتراجحة في } (-1)]{} \boxed{-2 < -3y < -1}$$

$$\begin{cases} 1 < 2x < 5 \\ 1 < 3y < 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2 < 2x + 3y < 7}$$

$$\underbrace{\begin{cases} 1 < 2x < 5 \\ -2 < -3y < -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-1 < 2x - 3y < 4}}_{\text{حصر صحيح}} ; \underbrace{\begin{cases} 1 < 2x < 5 \\ 1 < 3y < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < 2x - 3y < 3}_{\text{حصر خاطئ}}$$

$$1 < 3y < 2 \xrightarrow[\text{نقلب طرفي المتراجحة}]{} \boxed{\frac{1}{2} < \frac{1}{3y} < 1}$$

انتبه

$$\underbrace{\begin{cases} 1 < 2x < 5 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{3y} < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} < \frac{2x}{3y} < 5}}_{\text{حصر صحيح}} \quad ; \quad \underbrace{\begin{cases} 1 < 2x < 5 \\ 1 < 3y < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < \frac{2x}{3y} < \frac{5}{2}}_{\text{حصر خاطئ}}$$

قواعد المقارنة :

- $0 \le a \le 1 \Rightarrow a^3 \le a^2 \le a$; $\underbrace{(0{,}2)^3}_{0{,}008} \le \underbrace{(0{,}2)^2}_{0{,}04} \le \underbrace{(0{,}2)}_{0{,}2}$
- $a \ge 1 \Rightarrow a^3 \ge a^2 \ge a$; $\underbrace{(1{,}1)^3}_{1{,}331} \ge \underbrace{(1{,}1)^2}_{1{,}21} \ge \underbrace{(1{,}1)}_{1{,}1}$

مثال : قارن بين الأعداد : $(6-5x)^3$; $(6-5x)^2$; $(6-5x)$ حيث $\frac{4}{5} \le x \le 1$

$\frac{4}{5} \leq x \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 5x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq -5x \leq -4 \Rightarrow \boxed{1 \leq 6-5x \leq 2}$

$6-5x \geq 1 \Rightarrow \boxed{(6-5x) \ \leq \ (6-5x)^2 \ \leq \ (6-5x)^3}$

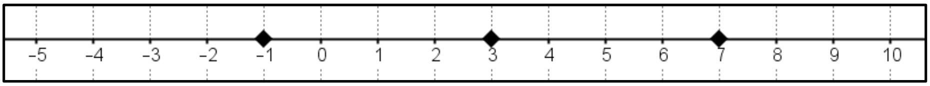
القيمة المطلقة والمسافة

1) $\boxed{|x| = a \Rightarrow x = -a \text{ أو } x = a}$

مثال :

حسابيا ... $|x-3| = 4 \Rightarrow x-3 = -4 \text{ أو } x-3 = 4 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ أو } x = 7}$

باستعمال المسافة ... $|x-3| = 4 \Rightarrow d(x;3) = 4 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ أو } x = 7}$



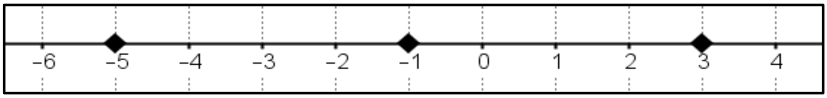
2) $\boxed{|x| = |y| \Rightarrow x = y \text{ أو } x = -y}$

مثال :

$|x-3| = |x+5| \Rightarrow x-3 = x+5 \text{ أو } x-3 = -x-5$

$\Rightarrow 0 = 8 \ (\text{مستحيل}) \text{ أو } 2x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

$|x-3| = |x+5| \Rightarrow d(x;3) = d(x;-5) \Rightarrow \boxed{x = -1}$

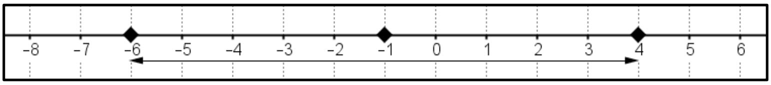


3) $\boxed{|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a}$

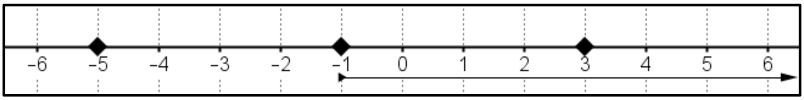
مثال :

① حسابيا ... $|x+1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x+1 \leq 5 \Rightarrow \boxed{-6 \leq x \leq 4}$

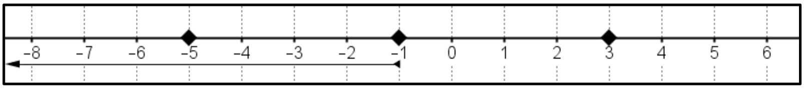
باستعمال المسافة ... $|x+1| \leq 5 \Rightarrow d(x;-1) \leq 5 \Rightarrow \boxed{-6 \leq x \leq 4}$



② $|x-3| \leq |x+5| \Rightarrow d(x;3) \leq d(x;-5) \Rightarrow \boxed{x \in [-1;+\infty[}$



③ $|x-3| \geq |x+5| \Rightarrow d(x;3) \geq d(x;-5) \Rightarrow \boxed{x \in]-\infty;-1]}$



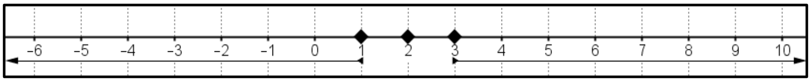
4) $\boxed{|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a \text{ أو } x \geq a}$

مثال :

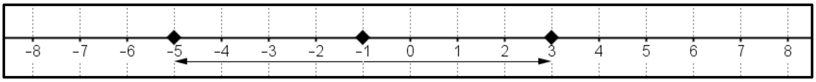
$|x-2| \geq 1 \Rightarrow x-2 \leq -1 \text{ أو } x-2 \geq 1 \Rightarrow x \leq 1 \text{ أو } x \geq 3$

حسابيا ... $\Rightarrow \boxed{x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[}$

باستعمال المسافة ... $|x-2| \geq 1 \Rightarrow d(x; 2) \geq 1 \Rightarrow \boxed{x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[}$



$|x-3| + |x+5| = 8 \Rightarrow d(x; 3) + d(x; -5) = 8 \Rightarrow \boxed{x \in [-5; 3]}$



الانتقال بين الحصر ، المجال ، المسافة والقيمة المطلقة

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\|x-c\| \leq r$	$d(x; c) \leq r$	$[c-r; c+r]$	$c-r \leq x \leq c+r$

$$\boxed{\begin{array}{c} a \leq x \leq b \ \Rightarrow x \in [a; b] \Rightarrow d(x; c) \leq r \Rightarrow |x-c| \leq r \\ c = \dfrac{a+b}{2} \ ; r = \dfrac{b-a}{2} = c-a = b-c \end{array}}$$

مثال :

- $|x-3| \leq 1 \Rightarrow d(x; 3) \leq 1 \Rightarrow x \in \left[\underbrace{2}_{3-1} \ ; \ \underbrace{4}_{3+1}\right] \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$
- $-2 \leq x \leq 2 \ \Rightarrow x \in [-2; 2] \Rightarrow d(x; 0) \leq 2 \Rightarrow |x| \leq 2$

3) عموميات على الدوال

تعيين مجموعة تعريف دالة

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)} \ ; g(x) = \sqrt{x+1} \ ; h(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{x} \ ;$

$p(x) = \dfrac{3x-5}{x^2+1} \ ; q(x) = \sqrt{|-4x-2|}$

$D_f = \{x \ ; x(x+1) \neq 0\} \ ; x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x = -1$

$\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1; 0\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[}$

$D_g = \{x\,; x+1 \geq 0\}\,; x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1\,;\ \boxed{D_g = [-1; +\infty[}$

$D_h = \{x\,; x+2 \geq 0$ و $x \neq 0\}$

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2\,;\ \boxed{D_h = [-2; 0[\, \cup\,]0; +\infty[}$

$D_p = \{x\,; x^2+1 \neq 0\}\,; x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ مستحيل ; $\boxed{D_p = \mathbb{R}}$

$D_q = \{x\,; |-4x-2| \geq 0\}$

$|-4x-2| \geq 0$ (محقّقة من أجل كل عدد حقيقي x) ; $\boxed{D_q = \mathbb{R}}$

تعيين الصور

لتعيين صورة عدد حقيقي وفق دالة f، نعوّض x بهذا العدد في عبارة $f(x)$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 3}$	$\boldsymbol{g(x) = \frac{3x+3}{x-1}}$	$\boldsymbol{h(x) = \sqrt{x+1}}$	$\boldsymbol{k(x) = \lvert 3x-2 \rvert}$
-2	-3	1	قيمة ممنوعة	8
-1	-4	0	0	5
0	-3	-3	1	2
1	0	قيمة ممنوعة	$\sqrt{2}$	1
2	5	9	$\sqrt{3}$	4

تعيين السوابق

لتعيين سوابق عدد حقيقي a وفق دالة f، نحلّ المعادلة : $f(x) = a$

مثال 1: سوابق العدد 5 بالدالة $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ هي :

$$f(x) = 5 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 5 = 5 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0$$

$\Rightarrow \boxed{x = 0 \text{ أو } x = 2}$

مثال 2: سوابق العدد 3 بالدالة $g(x) = \sqrt{2x-3}$ هي :

$$g(x) = 3 \Rightarrow \sqrt{2x-3} = 3 \xrightarrow[\text{نربّع طرفي المعادلة}]{} 2x - 3 = 9 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

مثال 3: سوابق العدد 2- بالدالة $h(x) = |3x-2|$ هي :

$h(x) = -2 \Rightarrow |3x-2| = -2$ مستحيل (القيمة المطلقة موجبة دوما)

ملاحظة : لكل سابقة صورة واحدة ، لكن الصورة قد تقبل سابقة فأكثر أو لا تقبل سابقة أصلا

دراسة اتجاه تغيّر دالة وتشكيل جدول تغيّراتها

لدراسة اتجاه تغيّر دالة f ، ننطلق من المتراجحة $a < b$ لنصل إمّا إلى المتراجحة $f(a) < f(b)$ فتكون الدالة متزايدة وإمّا إلى المتراجحة $f(a) > f(b)$ فتكون الدالة متناقصة ، حيث a و b عددين حقيقيين من D_f

مثال: ندرس اتجاه تغيّر الدالة $f(x) = (x+1)^2 - 3$ على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثمّ على المجال $[-1; +\infty[$

ليكن a و b عددين حقيقيين من $]-\infty; -1]$ حيث $a < b$. لدينا :

$$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \leq -1 \Rightarrow a+1 < b+1 \leq 0 \xRightarrow[\text{تربيع عددين سالبين}]{} (a+1)^2 > (b+1)^2$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 - 3 > (b+1)^2 - 3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(a)} > \boldsymbol{f(b)} \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متناقصة على المجال }]-\infty; -1]}$$

ليكن a و b عددين حقيقيين من $[-1; +\infty[$ حيث $a < b$. لدينا :

$$-1 \leq \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \Rightarrow 0 \leq a+1 < b+1 \Rightarrow (a+1)^2 < (b+1)^2$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 - 3 < (b+1)^2 - 3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(a)} < \boldsymbol{f(b)} \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة على المجال } [-1; +\infty[}$$

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗

دراسة شفعية دالة

لتكن f دالة معرّفة على D_f.

تكون الدالة f زوجية إذا كان D_f متناظرا بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_f$:

$$f(-x) = f(x)$$

تكون الدالة f فردية إذا كان D_f متناظرا بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_f$:

$$f(-x) = -f(x)$$

يقبل المنحنى البياني للدالة الزوجية محور تناظر (محور التراتيب) ويقبل المنحنى البياني للدالة الفردية مركز تناظر (المبدأ)

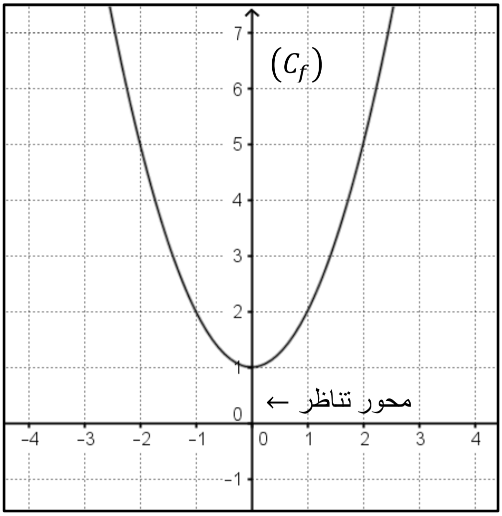
ملاحظة : يكون D_f متناظرا بالنسبة إلى 0 إذا كان على أحد هذه الأشكال :

$$\mathbb{R}\ ;\ \mathbb{R} - \{-a; a\}\ ;\ ]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[\ ;\ ]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[\ ;$$
$$[-a; a]\ ;\ ]-a; a[$$

مثال 1 :

$$f(x) = x^2 + 1\ ; D_f = \mathbb{R}\ ; f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

لدينا D_f متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$ ، منه الدالة f زوجية



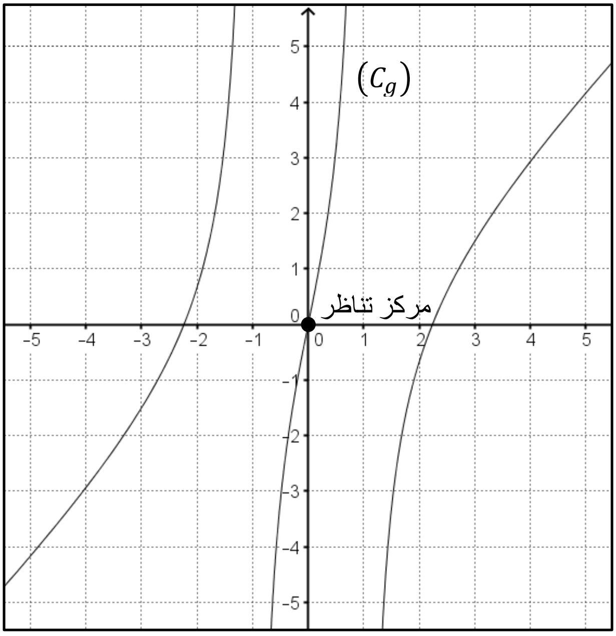
مثال 2 :

$$g(x)=\frac{x^3-5x}{x^2-1}\ ;D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}\ ;$$

$$g(-x)=\frac{(-x)^3-5(-x)}{(-x)^2-1}=\frac{-x^3+5x}{x^2-1}=-\frac{x^3-5x}{x^2-1}=-g(x)$$

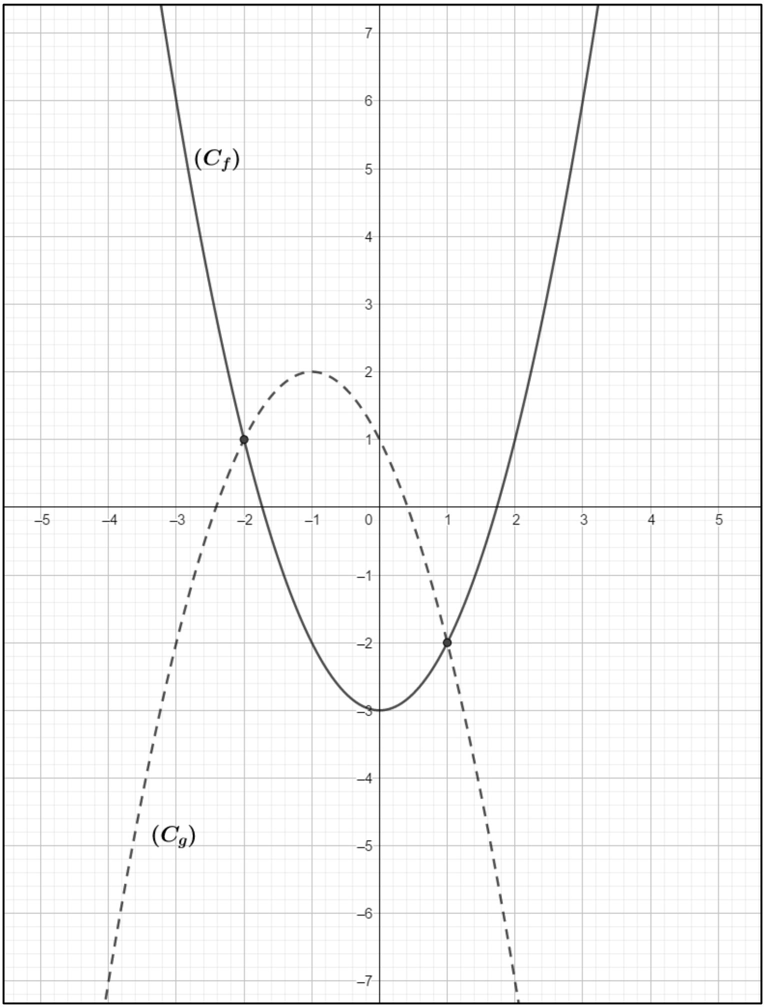
لدينا D_g متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x\in D_g$: $g(-x)=-g(x)$ ،

منه الدالة g فردية



استعمال التمثيل البياني لدالة

ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب



تعيين الصور :

$g(-2) = 1\ ; g(-1) = 2\ ; g(0) = 1\ ; g(1) = -2\ ;\ f(-2) = 1\ ;$
$f(-1) = -2\ ; f(0) = -3\ ; f(1) = -2$

تعيين السوابق :

الصورة	-2	1	6	-7
سوابقها وفق الدالة f	$-1; 1$	$-2; 2$	$-3; 3$	لا توجد
سوابقها وفق الدالة g	$-3; 1$	$-2; 0$	لا توجد	$-4; 2$

تعيين اتجاه تغيّر الدالتين :

- الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة على المجال $[0;+\infty[$
- الدالة g متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة على المجال $[-1;+\infty[$

حل المعادلات والمتراجحات :

- $f(x)=-2 \Rightarrow x=-1$ أو $x=1$
- $g(x)=-2 \Rightarrow x=-3$ أو $x=1$
- $f(x) \geq 1 \Rightarrow x \in\,]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$
- $g(x) \geq -7 \Rightarrow x \in [-4;2]$
- $f(x)=g(x) \Rightarrow x=-2$ أو $x=1$
- $f(x)>g(x) \Rightarrow x \in\,]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$ (C_f فوق C_g)
- $f(x)<g(x) \Rightarrow x \in\,]-2;1[$ (C_f تحت C_g)

تعيين القيم الحدّية للدالتين :

- القيمة الحدّية الصغرى للدالة f هي -3
- القيمة الحدّية الكبرى للدالة g هي 2

<u>استعمال جدول تغيّرات الدالة</u>

يُعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي :

x	-5		-2		-1		2		8
$f(x)$	-4	↗	0	↗	2	↘	1	↗	3

المعلومات التي يمكن قراءتها من هذا الجدول هي :

$D_f=[-5;8]$

الدالة f متزايدة على المجال $[-5;-1] \cup [2;8]$ ومتناقصة على المجال $[-1;2]$

الدالة f موجبة على المجال $]-2;8]$ ، سالبة على المجال $[-5;-2[$ وتنعدم عند -2

$f(-5)=-4\,;f(-2)=0\,;f(-1)=2\,;f(2)=1\,;f(8)=3$

المعادلتان $f(x)=-5$ و $f(x)=4$ ليس لهما حلول

المعادلتان $f(x)=-4$ و $f(x)=3$ تقبل كل واحدة منهما حلا وحيدا

المعادلتان $f(x)=1$ و $f(x)=2$ تقبل كل واحدة منهما حلين متمايزين

الدالة التآلفية :

الدالة التآلفية هي كل دالة تُكتب على شكل $f(x) = ax + b$ ، حيث a هو معامل توجيه الدالة f و b الترتيب إلى المبدأ

تكون الدالة التآلفية متزايدة إذا كان $a > 0$ ومتناقصة في حالة $a < 0$

إشارة $ax + b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

إشارة جداء أو حاصل قسمة :

لدراسة إشارة الدالتين $f(x) = (2x + 3)(1 - x)$ و $g(x) = \frac{5x-3}{-x-2}$ ، نتبع الخطوات التالية :

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}\ ; 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$2x+3$		-	0	+		+	
$1-x$		+		+	0	-	
$f(x)$		-	0	+	0	-	

$$5x - 3 = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5}\ ; -x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

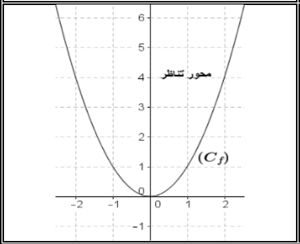
x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$5x-3$		-		-	0	+	
$-x-2$		+	0	-		-	
$g(x)$		-	‖	+	0	-	

الدوال المرجعية :

أ. الدالة مربّع:

الدالة مربّع (x^2) معرّفة على $\mathbb{R}$ ، متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ ومتزايدة على المجال $[0; +\infty[$ ، هي دالة زوجية ومنحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

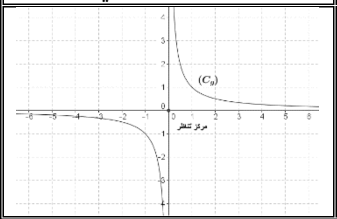
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	



ب. الدالة مقلوب:

الدالة مقلوب $\left(\frac{1}{x}\right)$ معرّفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ ، متناقصة على المجالين $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ ، هي دالة فردية ومنحناها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

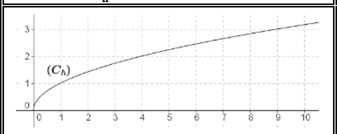
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	



ج. الدالة الجذر التربيعي:

الدالة الجذر التربيعي $(\sqrt{x})$ معرّفة على المجال $[0; +\infty[$ ، ومتزايدة على هذا المجال.

x	0		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	

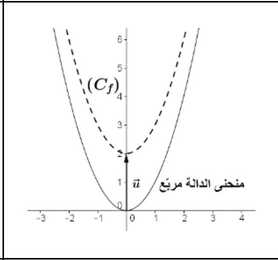
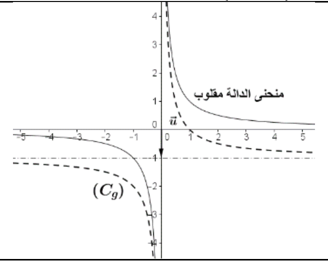
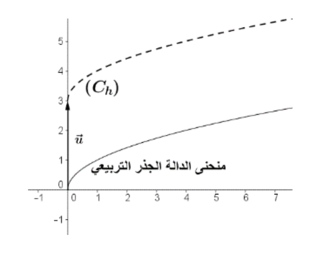
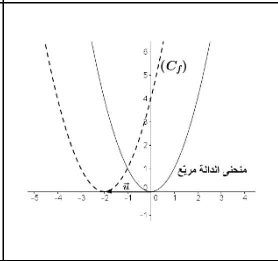
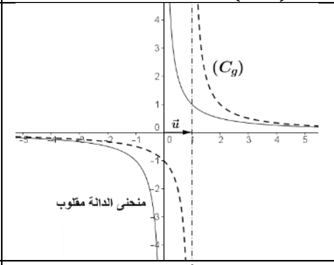
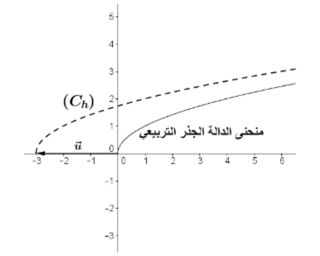
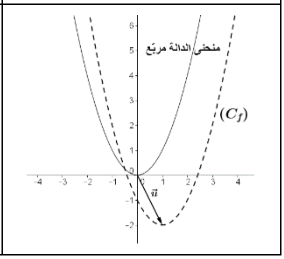
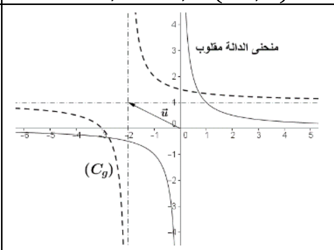
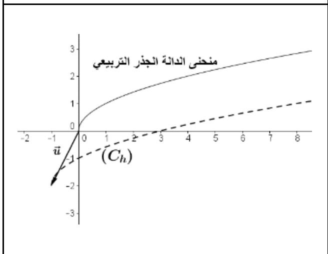


رسم منحنى دالة انطلاقا من منحنى دالة مرجعية:

لتكن f دالة مرجعية و g دالة ثانية حيث : $g(x) = f(x + a) + b$

المنحنى (C_g) هو صورة للمنحنى (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-a; b)$

أمثلة:

$f(x)=x^2+2$ $a=0;b=2;\ \vec{u}(0;2)$	$g(x)=\frac{1}{x}-1$ $a=0;b=-1;\ \vec{u}(0;-1)$	$h(x)=\sqrt{x}+3$ $a=0;b=3;\ \vec{u}(0;3)$
		
$f(x)=(x+2)^2$ $a=2;b=0;\ \vec{u}(-2;0)$	$g(x)=\frac{1}{x-1}$ $a=-1;b=0;\ \vec{u}(1;0)$	$h(x)=\sqrt{x+3}$ $a=3;b=0;\ \vec{u}(-3;0)$
		
$f(x)=(x-1)^2-2$ $a=-1;b=-2;\ \vec{u}(1;-2)$	$g(x)=\frac{1}{x+2}+1$ $a=2;b=1;\ \vec{u}(-2;1)$	$h(x)=\sqrt{x+1}-2$ $a=1;b=-2;\ \vec{u}(-1;-2)$
		

د. <u>الدالة جيب (sin) والدالة جيب تمام (cos):</u>

الدالة جيب (sin) معرّفة على $\mathbb{R}$ ، وهي دالة فردية ودورية دورها 2π ، متناقصة على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \cup \left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$ ومتزايدة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

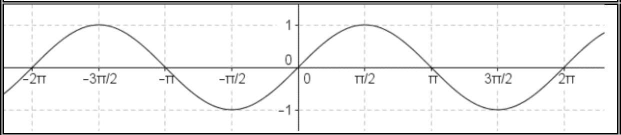
الدالة جيب تمام (cos) معرّفة على $\mathbb{R}$ ، وهي دالة زوجية ودورية دورها 2π ، متناقصة على المجال $[0;\pi]$ ومتزايدة على المجال $[-\pi;0]$.

<u>ملاحظة:</u> معنى أنّ الدالتين $\sin$ و $\cos$ دوريتان دورهما 2π ، أنّه يمكن اقتصار دراستهما على المجال $[0;2\pi[$ أو $[-\pi;\pi[$.

جدول تغيّرات الدالة sin

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

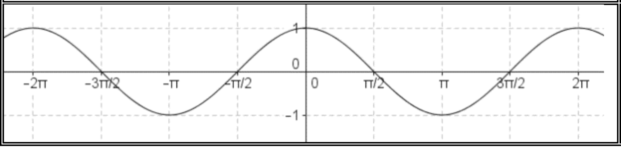
منحناها البياني



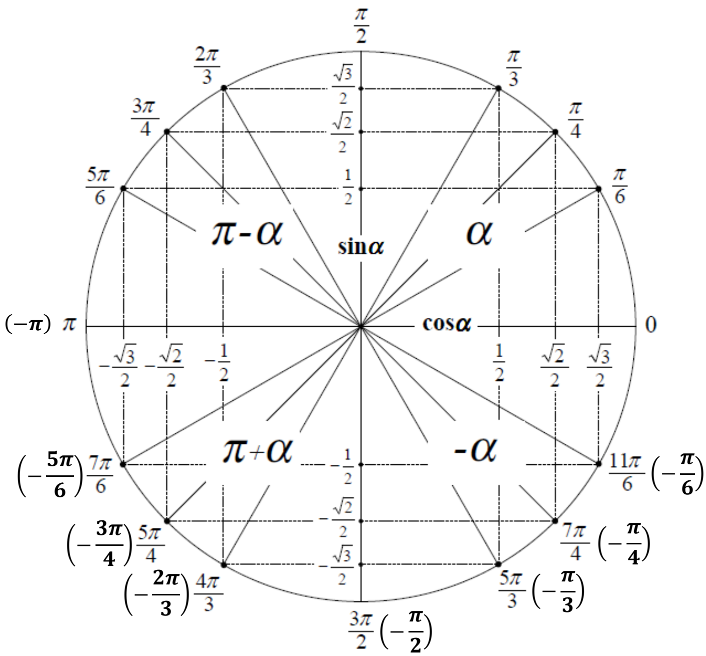
جدول تغيّرات الدالة cos

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

منحناها البياني



<u>الدائرة المثلثية:</u>



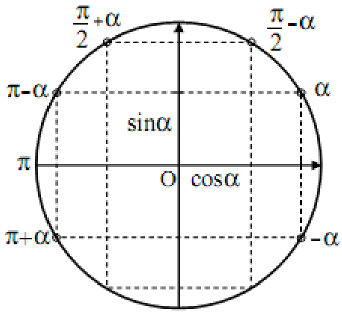
جدول النسب المثلثية لبعض الزوايا الشهيرة:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

مبرهنة : من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\boxed{-1 \leq \sin x \leq 1 \quad ، \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad ، \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

العلاقات بين النسب المثلثية للزوايا α ، $-\alpha$ ، $\pi - \alpha$ ، $\pi + \alpha$ ، $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ، $\frac{\pi}{2} + \alpha$:



$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$

تطبيقات:

1. حوّل $30°$ إلى الراديان و $\frac{2\pi}{5} rad$ إلى الدرجة.
2. دائرة نصف قطرها $5\ cm$. احسب أطوال الأقواس التي تحصرها الزوايا المركزية التي أقياسها : $\frac{\pi}{6}$ ، π ، $135°$.
3. مثّل على الدائرة المثلثية النقط التي صورها : $\frac{2001\pi}{2}$ ، $-\frac{1437\pi}{3}$ ، $\frac{2017\pi}{4}$
4. احسب القيم المضبوطة لـ: $\cos\frac{21\pi}{4}$ ، $\sin\frac{21\pi}{4}$ ، $\cos\frac{17\pi}{2}$ و $\sin\frac{17\pi}{2}$
5. احسب $\sin x$ علما أنّ $\cos x = \frac{4}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$
6. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :
$$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$
7. بسّط العبارتين التاليتين :
أ. $\cos(x+\pi) - 2\sin(x-\pi) + 2\cos(x-\pi) + \sin(x+\pi)$
ب. $3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)$
8. عيّن قيّم x من المجال $[\pi ; 2\pi]$ في الحالتين الآتيتين: $\cos x = \frac{1}{2}$ ؛ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

حلول التطبيقات:

1. **تحويل $30°$ إلى الراديان و $\frac{2\pi}{5} rad$ إلى الدرجة**

$$\begin{matrix} 180° \to \pi\, rad \\ 30° \to x\, rad \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{30}{180}\pi\, rad \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}\, rad}$$

$$\begin{matrix} \pi\, rad \to 180° \\ \frac{2\pi}{5}\, rad \to x \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180°}{\pi} \Rightarrow \boxed{x = 72°}$$

2. **حساب أطوال الأقواس التي تحصرها الزوايا التي أقياسها : $\frac{\pi}{6}$ ، π ، $135°$**

بما أنّ محيط الدائرة يساوي $2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 5 = 31{,}4\ cm$ فإنّ :

$$\begin{matrix} 2\pi \to 31{,}4\ cm \\ \frac{\pi}{6} \to x\ cm \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \times \frac{31{,}4}{2\pi} \Rightarrow \boxed{x \approx 2{,}6\ cm}$$

$$\begin{matrix} 2\pi \to 31{,}4\ cm \\ \pi \to x\ cm \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{31{,}4 \times \pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{x = 15{,}7\ cm}$$

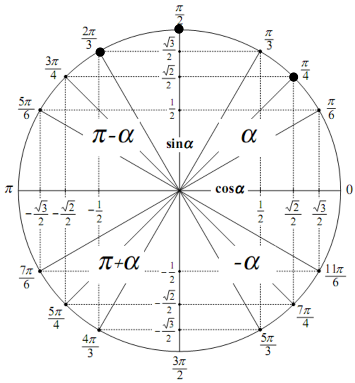
$$\begin{matrix} 360° \to 31{,}4\ cm \\ 135° \to x\ cm \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{135 \times 31{,}4}{360} \Rightarrow \boxed{x = 11{,}775\ cm}$$

3. **التمثيل على الدائرة المثلثية النقط التي صورها : $\frac{2001\pi}{2}$ ، $-\frac{1438\pi}{3}$ ، $\frac{2017\pi}{4}$**

$$\frac{2001\pi}{2} = \frac{2000\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 1000\pi + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{-1438\pi}{3} = \frac{-1440\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -440\pi + \frac{2\pi}{3} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

$$\frac{2017\pi}{4} = \frac{2016\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 504\pi + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$



تذكّر : من أجل كل عدد صحيح k:

الزاوية $2k\pi$ توافق الزاوية المعدومة (0).

الزاوية $(2k+1)\pi$ توافق الزاوية (π).

4. حساب القيم المضبوطة لـ: $\cos\frac{21\pi}{4}$ ، $\sin\frac{21\pi}{4}$ ، $\cos\frac{17\pi}{2}$ و $\sin\frac{17\pi}{2}$

$$\cos\frac{21\pi}{4}=\cos\left(\frac{20\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin\frac{21\pi}{4}=\sin\left(\frac{20\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\frac{17\pi}{2}=\cos\left(\frac{16\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=\boxed{0}$$

$$\sin\frac{17\pi}{2}=\sin\left(\frac{16\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=\boxed{1}$$

5. حساب $\sin x$ علما أنّ $\cos x=\frac{4}{5}$ و $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}\Rightarrow \sin x=\boxed{-\frac{3}{5}}$$

ملاحظة : الحل $\sin x=\frac{3}{5}$ مرفوض لأنّ $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ أي $\sin x\leq 0$

6. بيان أنّ : $(\cos x+\sin x)^2=1+2\sin x\cos x$

$$(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x=\boxed{1+2\sin x\cos x}$$

7. تبسيط العبارتين :

أ. $\cos(x+\pi)-2\sin(x-\pi)+2\cos(x-\pi)+\sin(x+\pi)$

$$\begin{aligned}&\cos(x+\pi)-2\sin(x-\pi)+2\cos(x-\pi)+\sin(x+\pi)\\&=\underbrace{\cos(\pi+x)}_{-\cos x}+2\underbrace{\sin(\pi-x)}_{\sin x}+2\underbrace{\cos(\pi-x)}_{-\cos x}+\underbrace{\sin(\pi+x)}_{-\sin x}\\&=-\cos x+2\sin x-2\cos x-\sin x\\&=\boxed{-3\cos x+\sin x}\end{aligned}$$

ب. $3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)$

$$\begin{aligned}&3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}_{\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)}_{\frac{15\pi}{2}=\frac{16\pi-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\cos\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)}_{\frac{13\pi}{2}=\frac{12\pi+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}}\\&=3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}_{-\sin x}+2\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sin x}=-2\sin x+2\sin x=\boxed{0}\end{aligned}$$

8. **تعيين قيّم x من المجال $[\pi ; 2\pi]$ في الحالتين الآتيتين :**

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{3}}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{4}} \\ \text{أو} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{4}} \end{cases}$$

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى:

أ. المتطابقات الشهيرة:

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ، $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ، $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ب. معادلة ومتراجحة جداء:

$A(x)\times B(x)=0$ تكافئ $A(x)=0$ أو $B(x)=0$ ، $[A(x)]^n=0$ تكافئ $A(x)=0$

ج. معادلة ومتراجحة حاصل قسمة:

$\frac{A(x)}{B(x)}=0$ تكافئ $A(x)=0$ و $B(x)\neq 0$

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية:

أ. الشكل النموذجي للعبارة ax^2+bx+c هو :

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ ، حيث : $\Delta=b^2-4ac$

ب. حلّ المعادلة $ax^2+bx+c=0$:

إذا كان	حلول المعادلة	تحليل العبارة ax^2+bx+c
$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
$\Delta<0$	لا توجد حلول	لا يمكن تحليل العبارة

تطبيقات:

1. انشر ما يلي : $(2x+1)^2$ ، $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2$ ، $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
2. حلل ما يلي : $x^2+8x+16$ ، $9x^2-30x+25$ ، $5x^2-4$
3. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :

أ. $4x^2-9+(2x+3)(3x-4)=0$

ب. $\frac{16x^2-49}{x-7}=0$

ج. $3x^2-4x+1=0$

د. $(3x-4)^2\geq(5-4x)^2$

ه. $\frac{x^2-3x}{-x+5}<0$

و. $-x^2+7x-6>0$

4. اكتب العبارات التالية على الشكل النموذجي :

$2x^2+6x+4$ ، $-x^2+4x-1$ ، x^2+2x-3

حلول التطبيقات:

1. **نشر العبارات التالية :**

$(2x+1)^2=(2x)^2+2(2x)(1)+(1)^2=\boxed{4x^2+4x+1}$

$\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\boxed{\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}}$

$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=(x)^2-(\sqrt{3})^2=\boxed{x^2-3}$

2. **تحليل العبارات التالية :**

$x^2+8x+16=(x)^2+2(x)(4)+(4)^2=\boxed{(x+4)^2}$

$9x^2-30x+25=(3x)^2-2(3x)(5)+(5)^2=\boxed{(3x-5)^2}$

$5x^2-4=(\sqrt{5}x)^2-(2)^2=\boxed{(\sqrt{5}x-2)(\sqrt{5}x+2)}$

3. **حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية :**

$\boldsymbol{4x^2-9+(2x+3)(3x-4)=0}$

$(2x+3)(2x-3)+(2x+3)(3x-4)=0$

$(2x+3)[(2x-3)+(3x-4)]=0\Rightarrow(2x+3)(5x-7)=0$

$\Rightarrow 2x+3=0$ أو $5x-7=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ أو $x=\frac{7}{5}\Rightarrow\boxed{S=\left\{-\frac{3}{2};\frac{7}{5}\right\}}$

$\boldsymbol{\frac{16x^2-49}{x-7}=0}\Rightarrow\begin{cases}16x^2-49=0\\ \text{و}\\ x-7\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(4x-7)(4x+7)=0\\ \text{و}\\ x-7\neq0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{4}\ \text{أو}\ x=-\frac{7}{4}\\ \text{و}\\ x\neq7\end{cases}\Rightarrow\boxed{S=\left\{-\frac{7}{4};\frac{7}{4}\right\}}$

$\boldsymbol{3x^2-4x+1=0}$

$\Delta=(-4)^2-4(3)(1)=4\ ;\ \Delta>0\Rightarrow$ للمعادلة حلان

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}\ ;\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2}{6}=1$

$\boxed{S=\left\{\frac{1}{3};1\right\}}$

$(\boldsymbol{3x-4})^{\boldsymbol{2}} \geq (\boldsymbol{5-4x})^{\boldsymbol{2}} \Rightarrow (3x-4)^2-(5-4x)^2 \geq 0$

$\Rightarrow [(3x-4)-(5-4x)][(3x-4)+(5-4x)] \geq 0$

$\Rightarrow (7x-9)(-x+1) \geq 0$

$7x-9=0 \Rightarrow x=\frac{9}{7}\ ;\ -x+1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
$7x-9$		-		-	0	+	
$-x+1$		+	0	-		-	
$(7x-9)(-x+1)$		-	0	+	0	-	

$$\boxed{S=\left[1;\frac{9}{7}\right]}$$

$\boldsymbol{\frac{x^2-3x}{-x+5}<0}\ ; x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ أو $x=3$

$-x+5=0 \Rightarrow x=5$

x	$-\infty$		0		3		5		$+\infty$
x		-	0	+		+		+	
$x-3$		-		-	0	+		+	
x^2-3x		+	0	-	0	+		+	
$-x+5$		+		+		+	0	-	
$\frac{x^2-3x}{-x+5}$		+	0	-	0	+	‖	-	

$$\boxed{S=]0;3[\cup]5;+\infty[}$$

$\boldsymbol{-x^2+7x-6>0}$

$\Delta=7^2-4(-1)(-6)=49-24=25$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-5}{-2}=6\ ;\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7+5}{-2}=1$

$-x^2+7x-6>0 \Rightarrow -(x-6)(x-1)>0$

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$x-6$		-		-	0	+	
$x-1$		-	0	+		+	
$(x-6)(x-1)$		+	0	-	0	+	
$-x^2+7x-6$		-	0	+	0	-	

$$\boxed{S=]1;6[}$$

4. كتابة العبارات التالية على الشكل النموذجي :

$$x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 1 - 3 = \boxed{(x+1)^2 - 4}$$

$$-x^2 + 4x - 1 = -(x^2 - 4x + 1) = -[(x-2)^2 - 4 + 1]$$

$$= \boxed{-[(x-2)^2 - 3]}$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2) = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2\right]$$

$$= \boxed{2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}$$

الإحصاء :

1) ترتيب قيم سلسلة إحصائية في جداول التكرارات والتواترات

للاستفادة من المعلومات التي يتمّ تجميعها أثناء عملية إحصاء ، ينبغي ترتيب هذه المعلومات (أو القيم) في جداول إحصائية تتضمن تكرار كل قيمة من هذه القيم ، وذلك حتى نتمكن من حساب التكرار المجمّع المتزايد ، التكرار المجمّع المتناقص ، التواتر المجمّع المتزايد و التواتر المجمّع المتناقص ، حسب القواعد التالية :

- نحصل على التكرار المجمّع المتزايد لقيمة بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم الأصغر منها.
- نحصل على التكرار المجمّع المتناقص لقيمة بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم الأكبر منها.
- التكرار النسبي (التواتر) لقيمة هو تكرار هذه القيمة بالنسبة إلى التكرار الكلي.
- التكرار النسبي (التواتر) المجمّع المتزايد $= \dfrac{\text{التكرار المجمع المتزايد}}{\text{التكرار الكلي}}$
- التكرار النسبي (التواتر) المجمّع المتناقص $= \dfrac{\text{التكرار المجمع المتناقص}}{\text{التكرار الكلي}}$

مثال 1 :

إليك العلامات (من 10) التي تحصّل عليها تلاميذ أحد الأقسام : 7 ، 3 ، 4 ، 9 ، 5 ، 7 ، 3 ، 5 ، 4 ، 7 ، 8 ، 6 ، 4 ، 8 ، 7 ، 6 ، 3 ، 5 ، 4 ، 9 ، 5 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 4 ، 5 ، 8 ، 7 ، 2.

تنظيم هذه المعطيات في جدول يكون كالتالي : (التواترات مدوّرة إلى الجزء من عشرة)

العلامة	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	4	5	6	3	6	3	2
التكرار المجمّع المتزايد	1	5	10	16	19	25	28	30
التكرار المجمّع المتناقص	30	29	25	20	14	11	5	2
التواتر المجمّع المتزايد (%)	3,3	16,7	33,3	53,3	63,3	83,3	93,3	100
التواتر المجمّع المتناقص (%)	100	96,7	83,3	66,7	46,7	36,7	16,7	6,7

ملاحظة :

- لحساب التكرار المجمّع (المتزايد والمتناقص) نجمع العددين الموصولين بسهم مائل.
- لحساب التواتر المجمّع المتزايد (للقيمة 5 مثلا) نقوم بالعملية التالية :

$$\frac{\underbrace{16}_{\text{التكرار المجمع المتزايد للقيمة 5}}}{\underbrace{30}_{\text{التكرار الكلي}}} \times 100 \approx 53,3\ \%$$

مثال 2 :

لدينا سلسلة إحصائيّة تتعلق بأطوال وديان بالكيلومتر. (القيم مجمّعة في فئات)

تنظيم هذه المعطيات في جدول يكون كالتالي :

الأطوال	$80 \le l < 100$	$100 \le l < 120$	$120 \le l < 140$	$140 \le l < 160$
التّكرار	12	10	12	6
التّكرار المجمّع المتزايد	12	22	34	40
التّكرار المجمّع المتناقص	40	28	18	6
التّواتر	$\frac{12}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{40}$
التّواتر المجمّع المتزايد	$\frac{12}{40}$	$\frac{22}{40}$	$\frac{34}{40}$	1
التّواتر المجمّع المتناقص	1	$\frac{28}{40}$	$\frac{18}{40}$	$\frac{6}{40}$

2) حساب مؤشرات سلسلة إحصائية

أ. الوسط الحسابي $(\bar{x})$

الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية هو مجموع قيم هذه السلسلة على عدد قيمها.

مثال : الوسط الحسابي للسلسلة الإحصائية التالية 3 ، 8 ، 4 ، 2 ، 1 ، 9 ، 7 هو :

$$\bar{x} = \frac{3+8+4+2+1+9+7}{7} = \frac{34}{7} \approx \boxed{4{,}86}$$

الوسط الحسابي المتوازن = $\dfrac{(\text{القيمة 1} \times \text{تكرارها}) + (\text{القيمة 2} \times \text{تكرارها}) + \dots}{\text{التكرار الكلّي}}$

مثال : لتكن السلسلة الإحصائية التالية :

القيمة	1	2	4	6	7
التكرار	6	5	1	3	1

$$\bar{x} = \frac{(1\times 6)+(2\times 5)+(4\times 1)+(6\times 3)+(7\times 1)}{6+5+1+3+1} = \frac{45}{16} \approx \boxed{2{,}8}$$

ب. الوسيط (Med) – الفئة الوسيطية

وسيط سلسلة إحصائية **مرتّبة** هو القيمة التي تقسم السلسلة إلى سلسلتين لهما نفس التكرار.

مثال :

وسيط السلسلة الإحصائية التالية : $\underbrace{1;2;2;3}_{\text{4 قيم}};\boxed{3};\underbrace{4;4;5;6}_{\text{4 قيم}}$ هو 3.

وسيط السلسلة الإحصائية التالية : $\underbrace{1;2;2;3}_{\text{4 قيم}};\boxed{3;4};\underbrace{4;5;6;7}_{\text{4 قيم}}$ هو $3{,}5 = \frac{3+4}{2}$.

في حالة طبع إحصائي مستمر (القيم مجمّعة في فئات) ، نبحث أولا عن الفئة الوسيطية ، ثمّ نعيّن قيمة الوسيط باستعمال القانون التالي :

$$Med = \text{الحد الأدنى للفئة} + \frac{\text{طول الفئة} \times \text{رتبة الوسيط في الفئة}}{\text{تكرار الفئة}}$$

(المقصود بالفئة هو الفئة الوسيطية)

مثال : لنحسب وسيط السلسلة الإحصائية السابقة (أطوال الوديان)

بما أنّ التكرار الكلي هو 40 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 20 (نأخذ الرتبة $\frac{N}{2}$ فقط) ،

والفئة الوسيطية هي $[100;120[$ ، ومنه فقيمة الوسيط هي :

$$Med = 100 + \frac{8 \times 20}{10} = \boxed{116}$$

حيث تمثل الأعداد 100 ، 8 ، 20 و 10 على الترتيب : الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{100}};120[$، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية ($\mathbf{8} = 12 - 20$)، طول الفئة الوسيطية ($\mathbf{20} = 100 - 120$) وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية وهو **10**.

ج. المنوال (Mod) – الفئة المنوالية

المنوال (الفئة المنوالية) هي القيمة (الفئة) ذات أكبر تكرار.

د. المدى

مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لها.

مثال : مدى السلسلة الإحصائية التالية 8 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 هو : $8 - 1 = 7$

3) التمثيلات البيانية

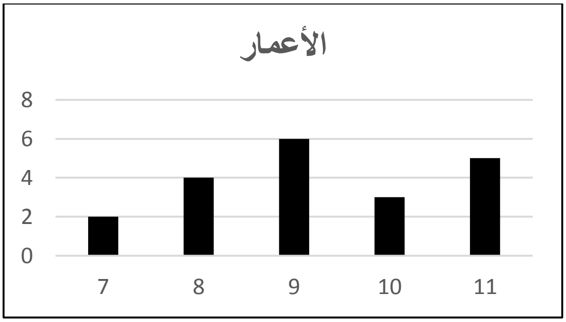
للحصول بسرعة على فكرة واضحة ومختصرة لسلسلة إحصائية ، نستعمل تمثيلات بيانية مثل المخطط بالأعمدة ، المدرج التكراري ، المخطط الدائري ، ...الخ.

مثال 1 : المخطط بالأعمدة

يعبّر الجدول الآتي عن توزيع أعمار 20 طفلا :

الأعمار بالسنوات	7	8	9	10	11
التكرار	2	4	6	3	5

المخطط بالأعمدة المتعلق بهذه السلسلة الإحصائية هو :



مثال 2 : المخطط الدائري

حققت إحدى الثانويات النتائج التالية (خاصة بتلاميذ السنة الأولى ج م ع ت) :

- عدد الراسبين : 36
- عدد المنتقلين إلى السنة الثانية شعبة رياضيات : 24
- عدد المنتقلين إلى السنة الثانية شعبة تقني رياضي : 18
- عدد المنتقلين إلى السنة الثانية شعبة تسيير واقتصاد : 30
- عدد المنتقلين إلى السنة الثانية شعبة علوم تجريبية : 132

لتمثيل هذه السلسلة الإحصائية بمخطط دائري نحسب قيس الزاوية الموافق لكل فئة :

- التكرار الكلي هو 240.
- قيس الزاوية الموافق للفئة الأولى (الراسبين) هو :

$$\begin{matrix} 240 \rightarrow 360° \\ 36 \rightarrow a \end{matrix}$$ ومنه : $a = \frac{36\times360}{240} = 54°$

- قيس الزاوية الموافق للفئة الثانية (رياضيات) هو :

$$\begin{matrix} 240 \rightarrow 360° \\ 24 \rightarrow b \end{matrix}$$ ومنه : $b = \frac{24\times360}{240} = 36°$

- قيس الزاوية الموافق للفئة الثالثة (تقني رياضي) هو :

$$\begin{matrix} 240 \rightarrow 360° \\ 18 \rightarrow c \end{matrix}$$ ومنه : $c = \frac{18\times360}{240} = 27°$

- قيس الزاوية الموافق للفئة الرابعة (تسيير واقتصاد) هو :

$$\begin{matrix} 240 \rightarrow 360° \\ 30 \rightarrow d \end{matrix}$$ ومنه : $d = \frac{30\times360}{240} = 45°$

- قيس الزاوية الموافق للفئة الخامسة (علوم تجريبية) هو :

$$\begin{matrix} 240 \rightarrow 360° \\ 132 \rightarrow e \end{matrix}$$ ومنه : $e = \frac{132\times360}{240} = 198°$

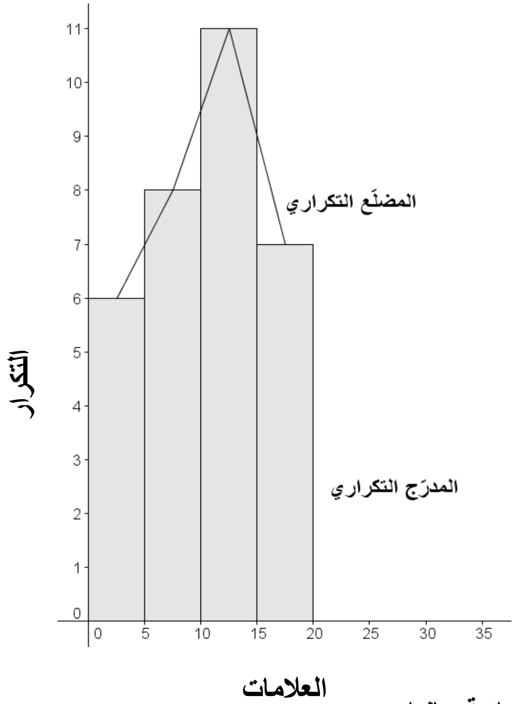
ويكون المخطط الدائري كالتالي :

مثال 3 : المدرج التكراري ومضلع التكرارات

تحصل تلاميذ قسم السنة 1 ج م ع ت في امتحان مادة الرياضيات على العلامات التالية :

العلامة (x)	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 15$	$15 \leq x < 20$
التكرار	6	8	11	7

المدرّج التكراري والمضلّع التكراري المتعلقان بهذه السلسلة الإحصائية :



تعيين وسيط سلسلة إحصائية بيانيا :

الطريقة الأولى:

باستعمال مضلع التكرارات المجمّعة الصاعدة. وتعتمد هذه الطريقة على رسم مضلع التكرارات المجمّعة الصاعدة ، ثمّ تعيين فاصلة النقطة التي ترتيبها $\frac{N}{2}$ ، حيث N يساوي التكرار الكلي.

الطريقة الثانية:

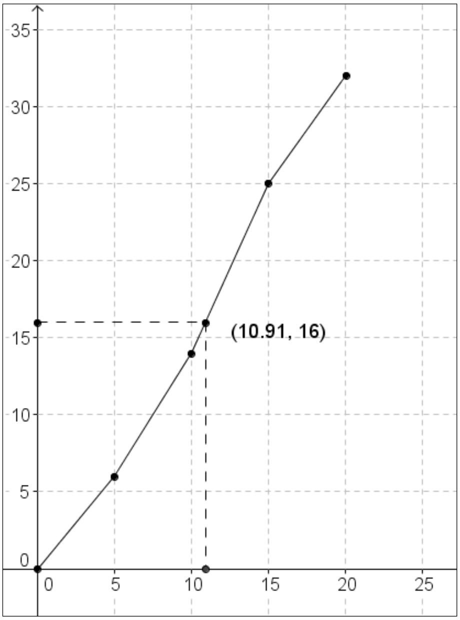
باستعمال مضلع التكرارات المجمّعة الصاعدة ومضلع التكرارات المجمّعة النازلة. وتعتمد هذه الطريقة على رسم المضلعين ، ثمّ تعيين فاصلة نقطة تقاطعهما.

مثال: نعيّن وسيط السلسلة الإحصائية السابقة حسابيا ونتحقق من النتيجة بيانيا

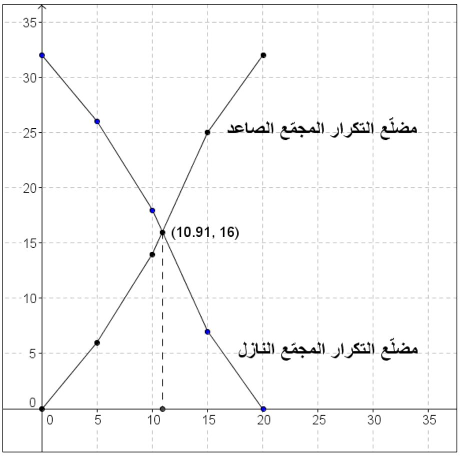
العلامة (x)	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 15$	$15 \leq x < 20$
التكرار	6	8	11	7
ت م ص	6	14	25	32
ت م ن	32	26	18	7

بما أنّ التكرار الكلي هو 32 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 16 ، والفئة الوسيطية هي : $[10;15[$ ،
ومنه فقيمة الوسيط هي : $Med = 10 + \frac{2\times 5}{11} \approx \boxed{10,91}$
حيث تمثل الأعداد 10 ، 2 ، 5 و 11 على الترتيب : الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{10}};15[$،
رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية $(\mathbf{2} = 16 - 14)$، طول الفئة الوسيطية $(\mathbf{5} = 15 - 10)$
وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية وهو $\mathbf{11}$.
لنتحقق من النتيجة بيانيا :

الطريقة الأولى:



الطريقة الثانية:



4) الربعيات والعشريات ومخطط العلبة

- الربعي الأول Q_1 لسلسة إحصائية هو أصغر قيمة للطبع الإحصائي حيث يكون 25% على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي Q_1.
- الربعي الثالث Q_3 لسلسة إحصائية هو أصغر قيمة للطبع الإحصائي حيث يكون 75% على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي Q_3.
- العشري الأول d_1 لسلسة إحصائية هو أصغر قيمة للطبع الإحصائي حيث يكون 10% على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي d_1.
- العشري التاسع d_9 لسلسة إحصائية هو أصغر قيمة للطبع الإحصائي حيث يكون 90% على الأقل من الحدود لها قيمة أصغر أو تساوي d_9.
- الانحراف الربعي هو الفرق بين الربعيين الثالث والأول، أي هو العدد $I = Q_3 - Q_1$
- في سلسلة إحصائية لدينا 25% من القيم أصغر من Q_1 ، 75% من القيم أصغر من Q_3 و 50% من القيم محصورة بين Q_1 و Q_3 ، ولدينا أيضا 10% من القيم أصغر من d_1 و 10% من القيم أكبر من d_9.

ملاحظة:

Q_1 ، Q_3 ، d_1 و d_9 هي قيم من السلسلة الإحصائية بخلاف الوسيط Med الذي يمكن أن لا يكون قيمة من السلسلة.

طريقة تحديد Q_1 ، Q_3 ، d_1 و d_9:

- **في حالة طبع كمي متقطع:**

بعد ترتيب القائمة ترتيبا تصاعديا، نحسب كلا من $\frac{N}{4}$ ، $\frac{3N}{4}$ ، $\frac{N}{10}$ و $\frac{9N}{10}$، وتمثل Q_1 القيمة التي رتبتها أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \geq \frac{N}{4}$ و Q_3 القيمة التي رتبتها أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \geq \frac{3N}{4}$ ، أما d_1 فهي القيمة التي رتبتها أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \geq \frac{N}{10}$ و d_3 القيمة التي رتبتها أصغر عدد طبيعي n يحقق $n \geq \frac{9N}{10}$.

- **في حالة طبع كمي مستمر:**

Q_1 ، Q_3 ، d_1 و d_9 هي فواصل النقط من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي تراتيبها $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{10}$ و $\frac{9}{10}$ على الترتيب.

مخطط العلبة:

لإنشاء مخطط العلبة نرسم محورا أفقيا ونعيّن عليه القيم min ، Q_1 ، Med ، Q_3 و max ، ثمّ نرسم على المجال $[Q_1; Q_3]$ مستطيلا (العلبة) طوله $Q_3 - Q_1$ وعرضه كيفي.

مثال: (انظر التمرين الثالث)

تطبيقات :

التمرين الأول :

يعطي الجدول التالي المصاريف الشهرية لعدد من العائلات :

المصاريف الشهرية (DA)	من 15.000 إلى 20.000	من 20.000 إلى 25.000	من 25.000 إلى 30.000	من 30.000 إلى 35.000	من 35.000 إلى 40.000
عدد العائلات	5	15	35	25	20
ت م متزايد *					
ت م متناقص					
التواتر					
تو م متزايد *					
تو م متناقص					
مركز الفئة					

* : ت م = التكرار المجمّع ، تو م = التواتر المجمّع

1. اكمل الجدول.
2. احسب متوسط المصاريف الشهرية للعائلات.
3. ارسم المدرج التكراري لهذه السلسلة.
4. احسب وسيط هذه السلسلة وتأكد من النتيجة بيانيا.

حلّ التمرين الأول :

1. اتمام الجدول

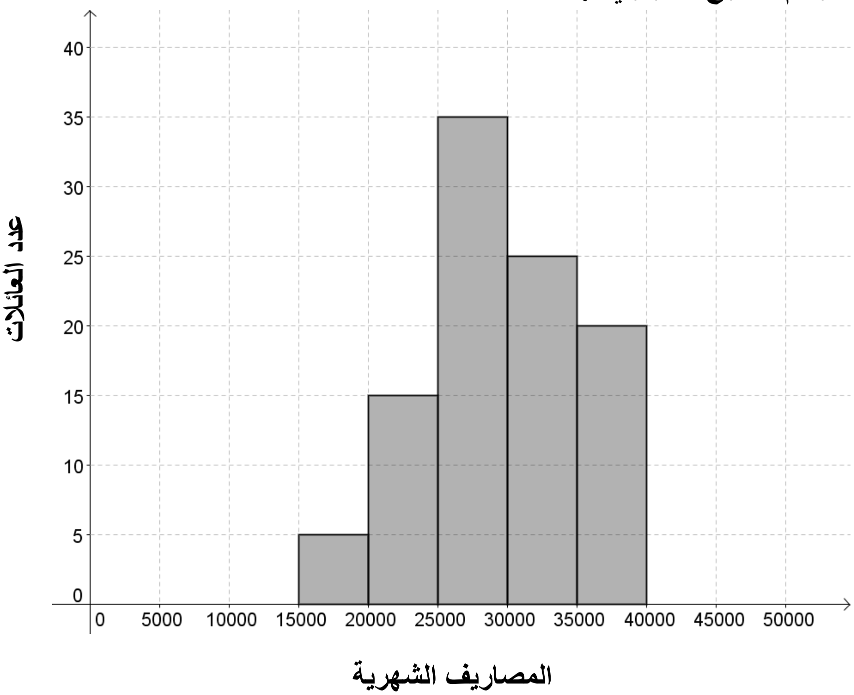
المصاريف الشهرية (DA)	من 15.000 إلى 20.000	من 20.000 إلى 25.000	من 25.000 إلى 30.000	من 30.000 إلى 35.000	من 35.000 إلى 40.000
عدد العائلات	5	15	35	25	20
ت م متزايد	5	20	55	80	100
ت م متناقص	100	95	80	45	20
التواتر	0,05	0,15	0,35	0,25	0,2
تو م متزايد	0,05	0,2	0,55	0,8	1
تو م متناقص	1	0,95	0,8	0,45	0,2
مركز الفئة	17.500	22.500	27.500	32.500	37.500

2. حساب متوسط المصاريف الشهرية للعائلات

$$\bar{x} = \frac{(17.500 \times 5) + (22.500 \times 15) + (27.500 \times 35) + (32.500 \times 25) + (37.500 \times 20)}{100}$$

$$\bar{x} = \frac{2.950.000}{100} = \boxed{29.500\ DA}$$

3. **رسم المدرج التكراري لهذه السلسلة**



4. **حساب وسيط هذه السلسلة**

بما أنّ التكرار الكلي هو 100 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 50 ، والفئة الوسيطية هي :

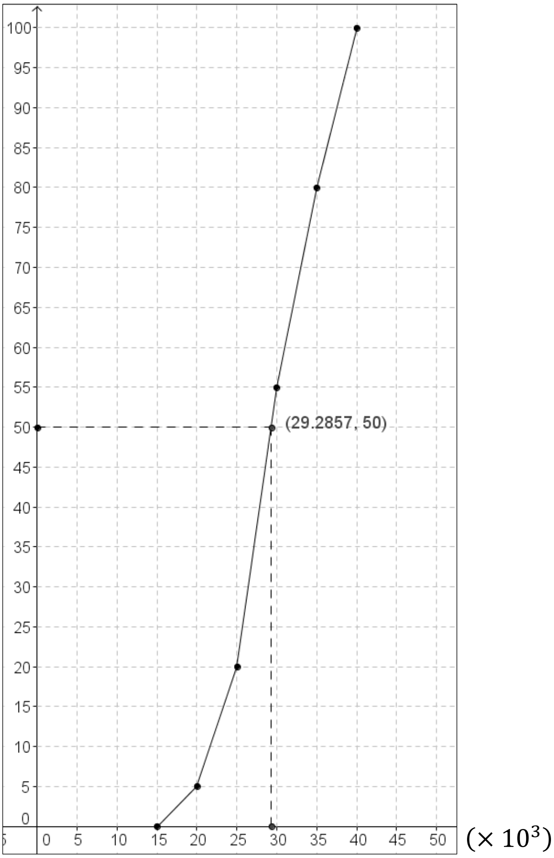
$[25000;30000[$ ، ومنه فقيمة الوسيط هي :

$$Med = 25000 + \frac{30 \times 5000}{35} \approx \boxed{29285,7}$$

حيث تمثل الأعداد 25000 ، 30 ، 5000 و 35 على الترتيب : الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{25000}};30000[$، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية ($\mathbf{30} = 50 - 20$)، طول الفئة الوسيطية ($\mathbf{5000} = 30000 - 25000$) وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية وهو **35**.

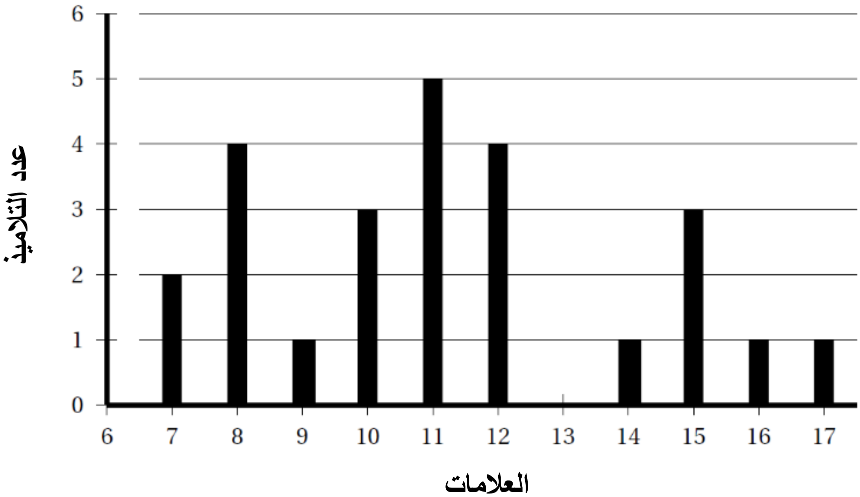
التأكد من النتيجة بيانيا:

نرسم مضلع التكرارات المجمّعة الصاعدة ، ثمّ نعيّن فاصلة النقطة التي ترتيبها 50 :



التمرين الثاني :

يمثل هذا المخطط بالأعمدة العلامات التي تحصل عليها تلاميذ قسم السنة 1 ج م ع ت في اختبار مادة الرياضيات.



1. ما هو عدد تلاميذ هذا القسم ؟
2. رتّب قيم هذه السلسلة الإحصائية في جدول تبيّن فيه التكرارات ، التكرارات المجمّعة المتزايدة والتكرارات المجمّعة المتناقصة.
3. احسب معدّل القسم.
4. احسب الوسيط لهذه السلسلة الإحصائية.
5. ما هي النسبة المئوية للتلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر أو تساوي 14 ؟

حل التمرين الثاني :

1. **عدد تلاميذ هذا القسم هو : 25 تلميذ**
2. **جدول التكرارات :**

العلامة	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
التكرار	2	4	1	3	5	4	1	3	1	1
ت م متزايد	2	6	7	10	15	19	20	23	24	25
ت م متناقص	25	23	19	18	15	10	6	5	2	1

3. **حسب معدّل القسم**

$$\bar{x} = \frac{7\times 2+8\times 4+9\times 1+10\times 3+11\times 5+12\times 4+14\times 1+15\times 3+16\times 1+17\times 1}{25}$$

$$\bar{x} = \frac{280}{25} = \boxed{11,2}$$

4. **حساب الوسيط لهذه السلسلة الإحصائية**

التكرار الكلي لهذه السلسلة الإحصائية هو 25 ، إذن رتبة الوسيط هي $\frac{25+1}{2}$ أي 13 ومن الجدول نستنتج أنّ الوسيط لهذه السلسلة الإحصائية هو 11 (ابحث عن التكرار المجمع المتزايد الأكبر أو يساوي 13).

5. **حساب النسبة المئوية للتلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر أو تساوي 14**

النسبة المئوية للتلاميذ الذين تحصلوا على علامة أكبر أو تساوي 14 هي :

$$\frac{\underbrace{6}_{\text{التكرار المجمع المتناقص للقيمة 14}}}{\underbrace{25}_{\text{التكرار الكلي}}} \times 100 = \boxed{24\%}$$

التمرين الثالث:

نعتبر السلسلة الإحصائية التالية:

القيم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار	2	7	11	3	8	1	9	5	12	6

1. شكل جدول التكرار المجمع الصاعد والتواتر المجمع الصاعد
2. عيّن الوسيط Med ، الربعيين Q_1 و Q_3 والعشريين d_1 و d_3.
3. مثل هذه السلسلة بمخطط العلبة

حل التمرين الثالث:

1. إنشاء جدول التكرار المجمع الصاعد والتواتر المجمع الصاعد

القيم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التكرار	2	7	11	3	8	1	9	5	12	6
ت م ص	2	9	20	23	31	32	41	46	58	64
تو م ص	$\frac{1}{32}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{23}{64}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{41}{64}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{29}{32}$	1

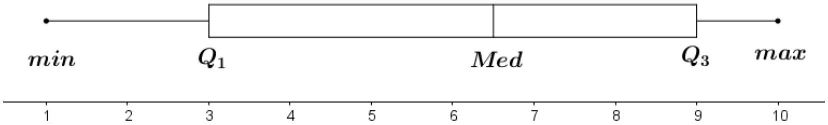
2. تعيين الوسيط Med ، الربعيين Q_1 و Q_3 والعشريين d_1 و d_9

بما أنّ $N = 64$ فإنّ الوسيط Med هو نصف مجموع الحدّين اللذين رتبتاهما 32 و 33 أي : $Med = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$.

لدينا : $\frac{N}{4} = 16$ ، $\frac{3N}{4} = 48$ ، $\frac{N}{10} = 6{,}4$ ، $\frac{9N}{10} = 57{,}6$ ، ومنه نستنتج أنّ:

$\underbrace{Q_1 = 3}_{\text{القيمة ذات الرتبة 16}}$ ، $\underbrace{Q_3 = 9}_{\text{القيمة ذات الرتبة 48}}$ ، $\underbrace{d_1 = 2}_{\text{القيمة ذات الرتبة 7}}$ ، $\underbrace{d_9 = 9}_{\text{القيمة ذات الرتبة 58}}$

3. تمثيل هذه السلسلة بمخطط العلبة



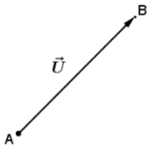
الحساب الشعاعي والهندسة التحليلية:

أ. الأشعّة والحساب الشعاعي:

مفهوم الشعاع

A و B نقطتان من المستوي. الثنائية $(A;B)$ تعيّن شعاعا نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$

نقول إنّ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ممثل للشعاع $\overrightarrow{U}$ ونكتب $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{AB}$



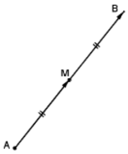
للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ثلاث خصائص وهي :

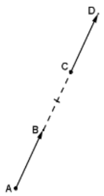
- المنحى : وهو منحى المستقيم (AB)
- الاتجاه : وهو من A نحو B
- الطول : وهو طول القطعة $[AB]$.

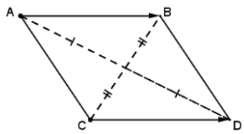
تساوي شعاعين

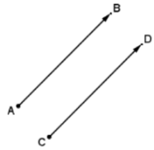
الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المنحنى ، نفس الاتجاه ونفس الطول.

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني أنّ للقطعتين $[AD]$ و $[BC]$ نفس المنتصف.
- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ يعني M منتصف $[AB]$.



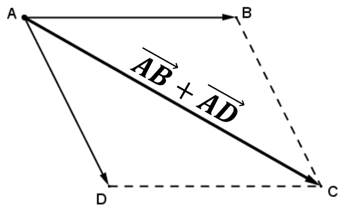


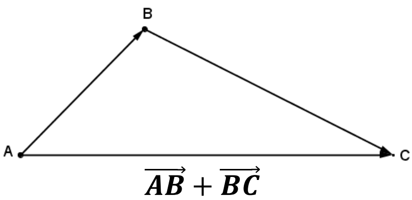




مجموع شعاعين

- مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ونكتب : $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}_{\text{علاقة شال}}$.
- إذا كانت النقطتان C و D لا تنتميان إلى (AB) فإنّ مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$ حيث $ABCD$ متوازي أضلاع.
- مجموع شعاعين متعاكسين هو الشعاع المعدوم : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$





جداء شعاع بعدد حقيقي:

$\vec{u}$ شعاع غير معدوم و k عدد حقيقي غير معدوم. جداء الشعاع $\vec{u}$ بالعدد k هو الشعاع $k\vec{u}$ حيث $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ لهما نفس المنحى ، نفس الاتجاه إذا كان $k>0$ ، متعاكسين في الاتجاه إذا كان $k<0$ و $\|k\vec{u}\|=|k|\times\|\vec{u}\|$.

خواص:

$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$	$(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$
$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$	$1\vec{u} = \vec{u}$
$k\vec{u} = \vec{0}$ يكافئ $[k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}]$	

توازي شعاعين:

نقول عن شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنّهما مرتبطان خطّيا إذا وُجد عدد حقيقي k حيث $\vec{v} = k\vec{u}$

تكون النقط A ، B ، C في استقامية إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطّيا

ب. <u>المعلم للمستوى:</u>

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي ، $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث: $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ و k عدد حقيقي.

- **تساوي شعاعين:** $\vec{u} = \vec{v}$ يكافئ $[x = x'$ و $y = y']$
- **مجموع شعاعين:** مركبتا المجموع $\vec{u}+\vec{v}$ هما $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
- **جداء شعاع بعدد حقيقي:** مركبتا الشعاع $k\vec{u}$ هما $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$
- **شرط الارتباط الخطّي:** $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّيا يكافئ $xy' - x'y = 0$

حساب مركبتي شعاع ، إحداثيتي منتصف قطعة مستقيم والمسافة بين نقطتين

$A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ نقطتان من المستوي.

إحداثيتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $\boxed{\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}}$

إحداثيتا النقطة M منتصف $[AB]$ هما $\boxed{\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)}$

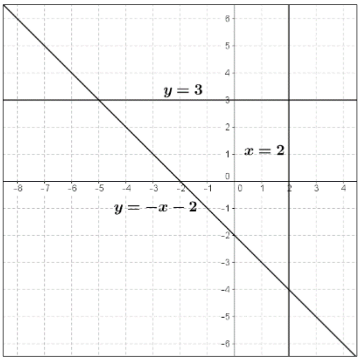
المسافة بين النقطتين A و B هي $\boxed{AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$

ج. <u>معادلة مستقيم:</u>

- كل مستقيم يوازي محور التراتيب له معادلة من الشكل : $x = a$
- كل مستقيم يوازي محور الفواصل له معادلة من الشكل : $y = b$
- كل مستقيم مائل له معادلة من الشكل :

$$y = ax + b$$

حيث a و b عددان حقيقيان.



د. <u>جملة معادلتين خطيتين لمجهولين:</u>

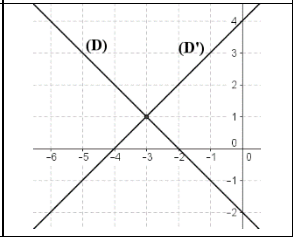
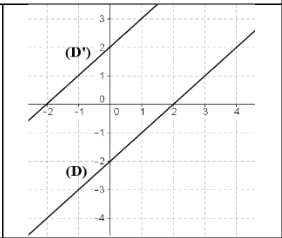
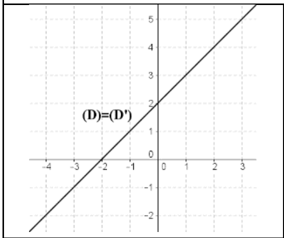
نسمي جملة معادلتين خطيتين لمجهولين كل جملة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}(S)$ حيث :

a ، a' ، b ، b' ، c ، c' أعداد معلومة.

إذا كان $ab'-a'b\neq 0$ فإنّ الجملة (S) تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $ab'-a'b=0$ فإنّ الجملة (S) إمّا لا حل لها وإمّا لها لا نهاية من الحلول.

التفسير الهندسي:

$ab'-a'b\neq 0$	$ab'-a'b=0$	
		
الجملة (S) تقبل حلا وحيدا $(D)\cap(D')=\{(-3;1)\}$	**الجملة (S) لا حل لها** $(D)\cap(D')=\emptyset$	**الجملة (S) لها لا نهاية من الحلول** $(D)\cap(D')=(D)$

تطبيقات:

1. بسّط العبارات التالية :

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ED} ، \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OA} ، \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}$$

2. A ، B ، C ، D أربع نقط ليست في استقامية.

أ. أنشئ النقطتين M وN حيث :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$

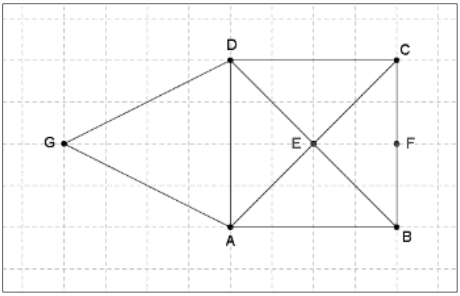
ب. بيّن أنّ : $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

3. $ABCD$ متوازي أضلاع. M وN نقطتين حيث : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AD}$

أ. بيّن أنّ : $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$

ب. استنتج أنّ النقط C ، M و N في استقامية.

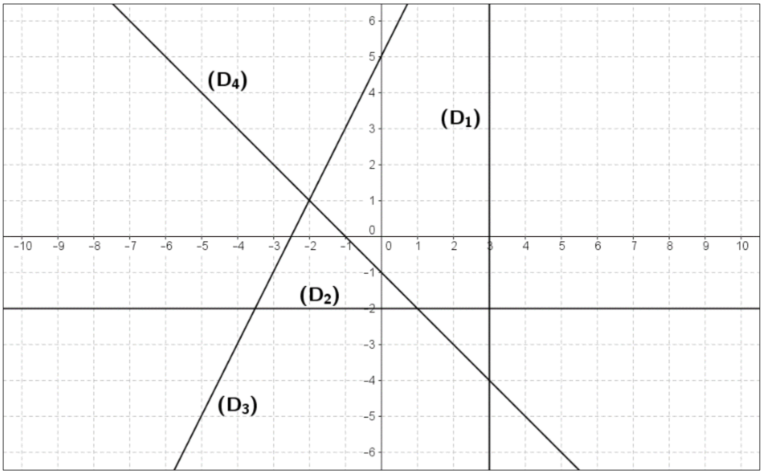
4. في الشكل التالي نعرّف المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$



أ. عيّن إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$

ب. استنتج أنّ النقط E ، F و G في استقامية.

5. اعط معادلة لكل واحد من هذه المستقيمات:



6. اكتب معادلة لكل واحد من هذه المستقيمات:

أ. (Δ_1) يشمل النقطتين $A(3;2)$ و $B(-1;5)$

ب. (Δ_2) يشمل النقطة $C(1;2)$ ومعامل توجيهه -3

ج. (Δ_3) يشمل النقطتين $D(2;-2)$ و $E(2;4)$

د. (Δ_4) يشمل النقطتين $F(5;1)$ و $G(-2;1)$

ه. (Δ_5) يشمل النقطة $H(-1;3)$ ويوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{5}x-3$

و. (Δ_6) يشمل النقطة $I(-1;-2)$ ويعامد المستقيم ذا المعادلة $y=-2x+1$

ز. (Δ_7) يوازي (Δ_2) ويقطع محور الفواصل عند الفاصلة 2.

7. حل الجمل التالية ومثّل الحلول بيانيا:

① $\begin{cases}2x-4y=0\\3x-7y=8\end{cases}$ ، ② $\begin{cases}-2x+5y=21\\4x-10y=-42\end{cases}$ ، ③ $\begin{cases}2x-6y=12\\x-3y=4\end{cases}$

حلول التطبيقات:

1. **تبسيط العبارات التالية :**

$$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\underbrace{\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}}_{\overrightarrow{DE}}+\underbrace{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{EB}}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}=\boxed{\overrightarrow{DB}}$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\underbrace{-\overrightarrow{OA}}_{\overrightarrow{AO}}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\boxed{\overrightarrow{AC}}$$

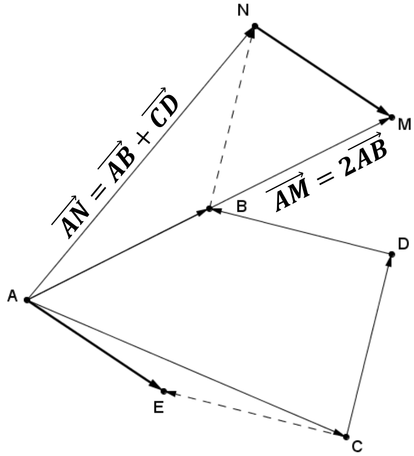
$$\overrightarrow{AB}\underbrace{-\overrightarrow{DC}}_{\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{BC}\underbrace{-\overrightarrow{ED}}_{\overrightarrow{DE}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\boxed{\overrightarrow{AE}}$$

2.

أ. **انشاء النقطتين $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{N}$**

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{AB}}=\boxed{2\overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{CD}}=\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}$$



ب. بيان أنّ : $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

طريقة ① :

$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$$

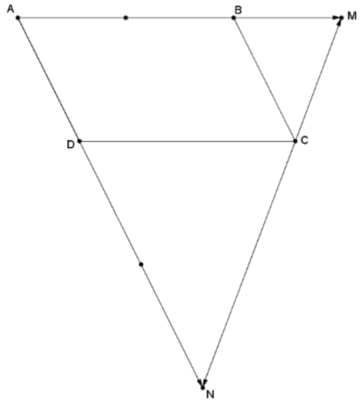
$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{DB}}=\boxed{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}}$$

طريقة ② :

$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}=\boxed{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}}$$

.3



أ. بيان أنّ : $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BC}=\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}}$$

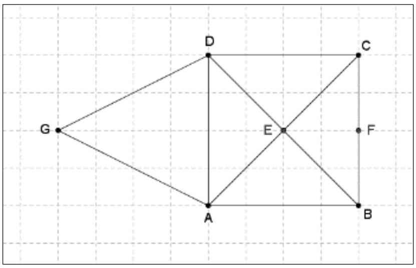
$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\underbrace{\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}}_{2\overrightarrow{AD}}-\overrightarrow{DC}=\boxed{2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}}$$

ب. استنتاج أنّ النقط C ، M و N في استقامية

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=-2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{CN}=-2\overrightarrow{CM}}$$

بما أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CN}$ مرتبطان خطّيا ، نستنتج أنّ النقط C ، M و N في استقامية.

.4



أ. تعيين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$

$A(0;0)$ ، $B(1;0)$ ، $C(1;1)$ ، $D(0;1)$ ، $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ، $F(1;\frac{1}{2})$ ، $G\left(-1;\frac{1}{2}\right)$

ب. استنتاج أنّ النقط E ، F و G في استقامية

$\overrightarrow{EG}\left(-\frac{3}{2};0\right)$; $\overrightarrow{EF}\left(\frac{1}{2};0\right)$. نلاحظ أنّ $\overrightarrow{EG}=-3\overrightarrow{EF}$ ، ومنه الشعاعين $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{EG}$ مرتبطين خطّيا ، وبالتالي نستنتج أنّ النقط E ، F و G في استقامية.

5. اعطاء معادلة لكل واحد من هذه المستقيمات:

$(D_4): y=-x-1$ ، $(D_3): y=2x+5$ ، $(D_2): y=-2$ ، $(D_1): x=3$

6. كتابة معادلة لكل واحد من هذه المستقيمات:

أ. (Δ_1) يشمل النقطتين $A(3;2)$ و $B(-1;5)$

$$M(x;y)\in(\Delta_1)\Rightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}\parallel \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\Rightarrow \underbrace{3(x-3)+4(y-2)=0}_{\text{شرط الارتباط الخطّي}}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta_1): 3x+4y-17=0}$$

ب. (Δ_2) يشمل النقطة $C(1;2)$ ومعامل توجيهه -3

$$(\Delta_2): y=-3x+b\ ;\ C\in(\Delta_2)\Rightarrow 2=-3(1)+b\Rightarrow b=5$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta_2): y=-3x+5}$$

ج. (Δ_3) يشمل النقطتين $D(\mathbf{2};-2)$ و $E(\mathbf{2};4)$

$$x_D=x_E=2\Rightarrow \boxed{(\Delta_3): x=2}$$

د. (Δ_4) يشمل النقطتين $F(5;\mathbf{1})$ و $G(-2;\mathbf{1})$

$$y_F=y_G=1\Rightarrow \boxed{(\Delta_4): y=1}$$

ه. (Δ_5) يشمل النقطة $H(-1;3)$ ويوازي المستقيم ذا المعادلة $y=\frac{2}{5}x-3$

$$(\Delta_5): y=\frac{2}{5}x+b\ ;\ H\in(\Delta_5)\Rightarrow 3=\frac{2}{5}(-1)+b\Rightarrow b=\frac{17}{5}$$

$\Rightarrow \boxed{(\Delta_5): y=\frac{2}{5}x+\frac{17}{5}}$ (مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه)

و. (Δ_6) يشمل النقطة $I(-1;-2)$ ويعامد المستقيم ذا المعادلة $y=-2x+1$

ليكن a معامل توجيه (Δ_6). لدينا :

$$-2a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow(\Delta_6): y=\frac{1}{2}x+b; I\in(\Delta_6)\Rightarrow -2=\frac{1}{2}(-1)+b$$

$$\Rightarrow b=-\frac{3}{2}\Rightarrow \boxed{(\Delta_6): y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}\ \ [(\Delta)\perp(\Delta')\Rightarrow a.a'=-1]$$

ز. (Δ_7) يوازي (Δ_2) ويقطع محور الفواصل عند الفاصلة 2

$$(\Delta_7)\parallel(\Delta_2)\Rightarrow(\Delta_7): y=-3x+b\ ;\ K(2;0)\in(\Delta_7)\Rightarrow 0=-3(2)+b$$

$$\Rightarrow b=6\Rightarrow \boxed{(\Delta_7): y=-3x+6}$$

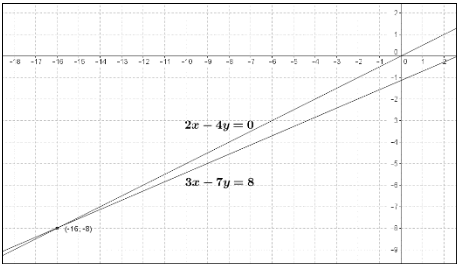
7. حل الجمل وتمثيل الحلول بيانيا:

$$① \begin{cases}2x-4y=0\\3x-7y=8\end{cases}\ ;\ \Delta=\begin{vmatrix}2 & -4\\3 & -7\end{vmatrix}=(-14)-(-12)=-2$$

بما أنّ المحدّد غير معدوم ، فإنّ الجملة ① تقبل حلا وحيدا.

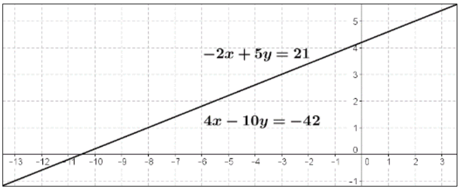
$$x=\frac{\Delta_x}{-2}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -4\\ 8 & -7\end{vmatrix}}{-2}=\frac{32}{-2}=-16\ ;\ y=\frac{\Delta_y}{-2}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 8\end{vmatrix}}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$$

$\boxed{S_{①}=\{(-16;-8)\}}$



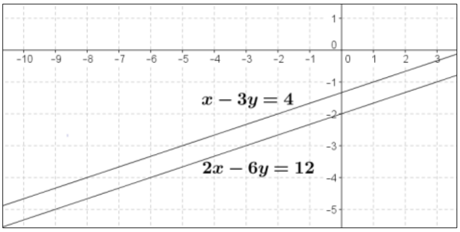
$$② \begin{cases}-2x+5y=21\\ 4x-10y=-42\end{cases};\ \Delta=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 4 & -10\end{vmatrix}=(20)-(20)=0$$

$$-\frac{2}{4}=-\frac{5}{10}=-\frac{21}{42}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \underbrace{\boxed{S_{②}=\{(x;y);-2x+5y=21\}}}_{\text{الجملة ② تقبل ما لا نهاية من الحلول}}$$



$$③ \begin{cases}2x-6y=12\\ x-3y=4\end{cases};\ \Delta=\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}=(-6)-(-6)=0$$

$$\frac{2}{1}=\frac{-6}{-3}\neq\frac{12}{4}\Rightarrow \underbrace{\boxed{S_{③}=\emptyset}}_{\text{الجملة ③ لا تقبل حلا}}$$



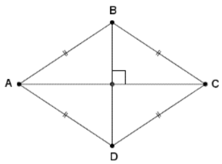
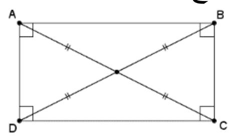
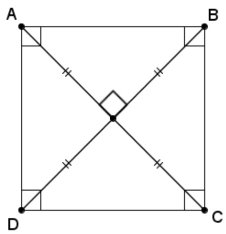
الهندسة المستوية:

متوازي الأضلاع:

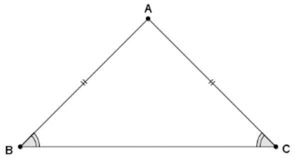
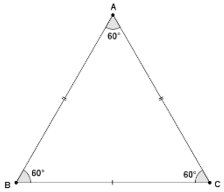
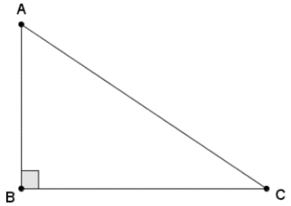
يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا تحقق أحد هذه الشروط:

1. $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان
2. $AB = DC$ و $AD = BC$
3. $AB = DC$ و $(AB) \parallel (DC)$
4. $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ و $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$

متوازيات الأضلاع الخاصة:

المعين: هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان 	1. القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتعامدان 2. $AB = BC = CD = DA$ 3. (AC) ينصّف كلا من $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ و (BD) ينصّف كلا من $\widehat{ABC}$ و $\widehat{ADC}$
المستطيل: هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة 	1. القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتقايسان 2. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$
المربّع: هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة 	1. القطران $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ، متعامدان ومتقايسان 2. $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ و $AB = BC = CD = DA$

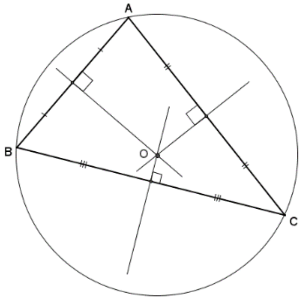
المثلثات الخاصة:

المثلث متساوي الساقين	المثلث متقايس الأضلاع	المثلث قائم الزاوية
		
$\boldsymbol{AB = AC}$ $\boldsymbol{\widehat{ABC} = \widehat{ACB}}$	$\boldsymbol{AB = AC = BC}$ $\boldsymbol{\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°}$	$\boldsymbol{\widehat{ABC} = 90°}$

المستقيمات الخاصة في مثلث:

① المحاور

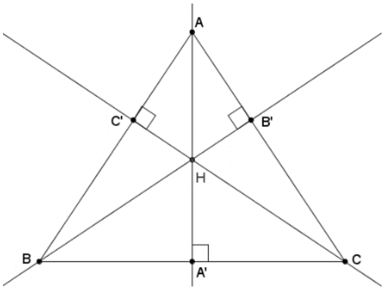
- محور القطعة $[BC]$ هو المستقيم الذي يعامد $[BC]$ في منتصفها.
- تتقاطع المحاور الثلاثة في نقطة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.



$$\boxed{OA = OB = OC}$$

② الارتفاعات

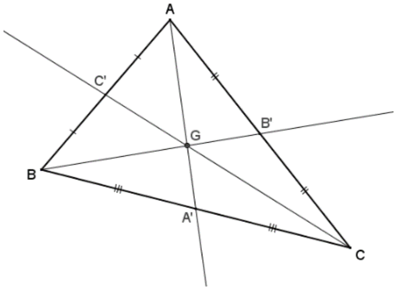
- الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ هو المستقيم الذي يشمل A ويعامد $[BC]$.
- تتقاطع الارتفاعات الثلاثة في نقطة هي نقطة تلاقي الارتفاعات.



$$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \frac{AA' \times BC}{2} = \frac{BB' \times AC}{2} = \frac{CC' \times AB}{2}}$$

③ المتوسطات

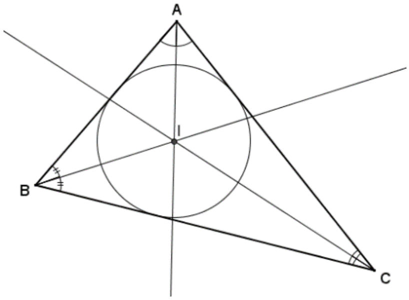
- المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ هو المستقيم الذي يشمل A ويقطع $[BC]$ في منتصفها.
- تتقاطع المتوسطات الثلاثة في نقطة هي مركز ثقل المثلث ABC.
- $AG = \frac{2}{3}AA'$ ، $BG = \frac{2}{3}BB'$ ، $CG = \frac{2}{3}CC'$.



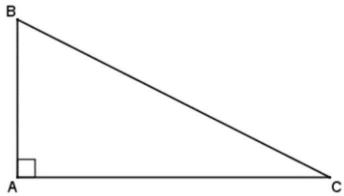
$\boxed{GA = 2GA' \text{ ، } GB = 2GB' \text{ ، } GC = 2GC'}$

④ المنصّفات

- منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$ هو المستقيم الذي يقسم الزاوية $\widehat{BAC}$ إلى زاويتين متقايستين.
- تتقاطع المنصّفات الثلاثة في نقطة هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC.



مبرهنة فيثاغورس – النسب المثلثية:



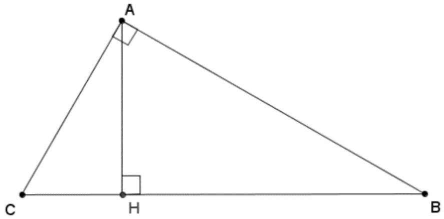
النظرية :

إذا كان المثلث ABC قائما في A **فإنّ :** $\boxed{\boldsymbol{BC^2 = AB^2 + AC^2}}$

النظرية العكسية :

إذا كانت أطوال المثلث ABC تحقق $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **فإنّ** المثلث ABC قائم في A.

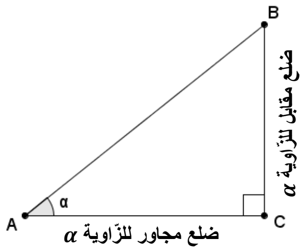
العلاقات المترية في مثلث قائم:



$$AB \times AC = AH \times BC$$
$$AB^2 = BH \times BC$$
$$AC^2 = CH \times CB$$
$$AH^2 = HB \times HC$$

النسب المثلثية في مثلث قائم:

ABC مثلث قائم في C.



جيب الزّاوية α: $\sin\alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{BC}{AB}$

جيب تمام الزّاوية α: $\cos\alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \alpha}{\text{طول الوتر}} = \dfrac{AC}{AB}$

ظل الزّاوية α: $\tan\alpha = \dfrac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \alpha}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \alpha} = \dfrac{BC}{AC}$

مبرهنة طالس:

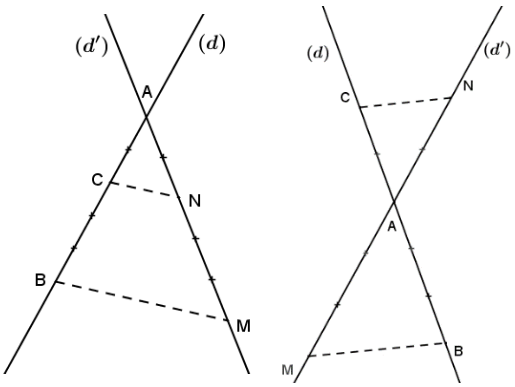
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

B و C نقطتان من (d) تختلفان عن A.

M و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان (BM) و (CN) متوازيين فإنّ :

$$\boxed{\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{MB}{CN}}$$



عكس مبرهنة طالس:

إذا كان $\dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AC}{AB}$

والنقط A ، N ، M و A ، C ، B

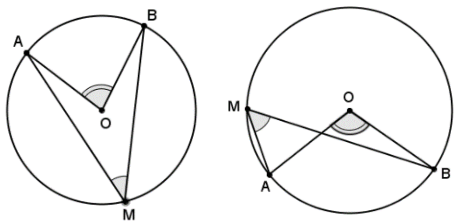
على استقامة واحدة وبنفس الترتيب

فإنّ : (CN) و (MB) متوازيان.

الزوايا والدائرة:

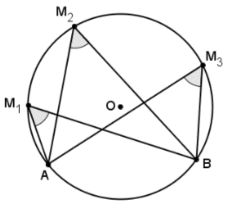
في كل دائرة، الزّاوية المركزيّة تساوي ضعف الزّاوية المحيطيّة التي تحصر معها نفس القوس.

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

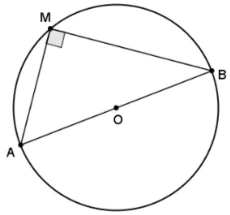


الزّوايا المحيطيّة، في دائرة، التي تحصر نفس القوس، أو تحصر أقواسا متقايسة تكون متقايسة.
إذا كان أحد أضلاع المثلّث المرسوم داخل دائرة، قطرا لهذه الدائرة، فهو مثلّث قائم.
تكون رؤوس الرباعي المحدّب $ABCD$ من نفس الدائرة إذا تحقق أحد الشرطين:

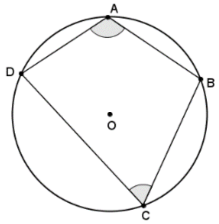
1. $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$
2. الزّاويتان $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ متكاملتان



$\widehat{AM_1B} = \widehat{AM_2B} = \widehat{AM_3B}$



$\widehat{AMB} = 90°$



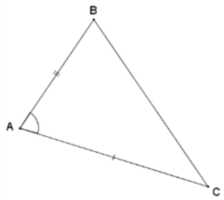
$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$

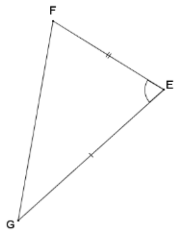
المثلثات المتقايسة:

نقول عن مثلثين إنّهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.
مثلثان متقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى مثنى وزواياهما متقايسة مثنى مثنى.
يتقايس مثلثان في الحالات التالية:

① الحالة الأولى :

يتقايس مثلثان إذا تقايس فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما.

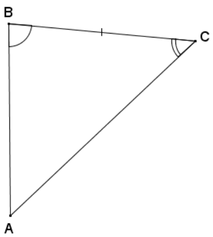


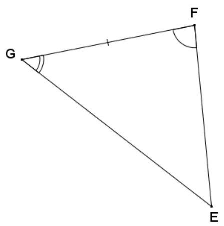


$\boldsymbol{\widehat{BAC} = \widehat{FEG}}$ ، $\boldsymbol{AC = EG}$ ، $\boldsymbol{AB = EF}$

② الحالة الثانية :

يتقايس مثلثان إذا تقايس فيهما زاويتان والضلع المحصور بينهما.

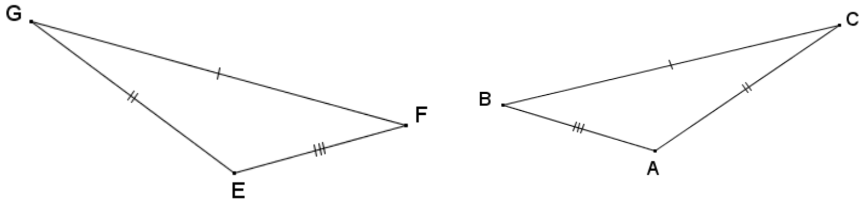




$\boldsymbol{\widehat{ABC} = \widehat{EFG}}$ ، $\boldsymbol{\widehat{ACB} = \widehat{EGF}}$ ، $\boldsymbol{BC = FG}$

③ الحالة الثالثة :

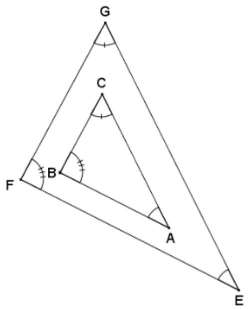
يتقايس مثلثان إذا تقايست فيهما الأضلاع الثلاثة.



$$BC = FG \text{ ، } AC = EG \text{ ، } AB = EF$$

نتيجة: يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب أو تناظر محوري أو تناظر مركزي أو دوران.

المثلثات المتشابهة:



نقول عن مثلثين إنّهما متشابهين إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

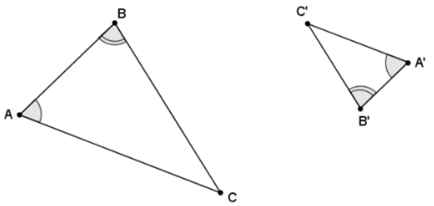
$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$$

حالات تشابه مثلثين:

يتشابه مثلثان في الحالات التالية:

① الحالة الأولى :

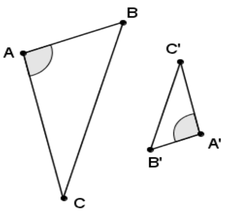
يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر



$$\boxed{\widehat{B} = \widehat{B'} \text{ و } \widehat{A} = \widehat{A'}}$$

② الحالة الثانية :

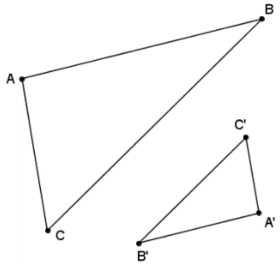
يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر، وكان طولا الضلعين اللذين يحصران إحدى هاتين الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين اللذين يحصران الزاوية الأخرى.



$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ و } \widehat{A} = \widehat{A'}}$$

③ **الحالة الثالثة :**

يتشابه مثلثان إذا كانت أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.



$$\boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}}$$

نسبة تشابه مثلثين:

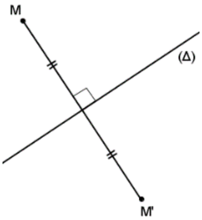
ليكن ABC و $A'B'C'$ مثلثان متشابهان. نسمي نسبة تشابه هذين المثلثين العدد k ، $(k > 0)$

حيث: $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

- إذا كان $0 < k < 1$ فإنّ المثلث $A'B'C'$ هو تصغير للمثلث ABC
- إذا كان $k > 1$ فإنّ المثلث $A'B'C'$ هو تكبير للمثلث ABC
- إذا كان $k = 1$ فإنّ المثلثين $A'B'C'$ و ABC متقايسان
- إنّ $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C'$.

التحويلات النقطية:

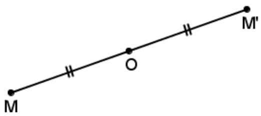
1. التناظر المحوري:



(Δ) مستقيم ثابت. التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث:

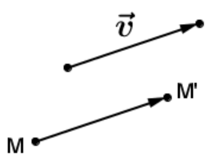
- إذا كانت $M \notin (\Delta)$ فإنّ (Δ) محور القطعة $[MM']$
- إذا كانت $M \in (\Delta)$ فإنّ $M' = M$.

2. التناظر المركزي:



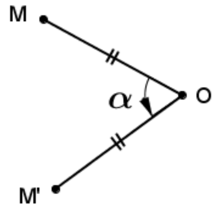
O نقطة ثابتة. التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث: O منتصف القطعة $[MM']$.

3. الانسحاب:



$\vec{v}$ شعاع ثابت. الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$ هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

4. الدوران:



O نقطة ثابتة من مستوي موجّه و α زاوية معلومة.
الدوران الذي مركزه O وزاويته α في الاتجاه المباشر (عكس عقارب الساعة) هو التحويل الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث:

- إذا كانت $M = O$ فإنّ $M' = O$
- إذا كانت $M \neq O$ فإنّ $\widehat{MOM'} =$

$OM = OM'$ و α والثلاثية (O, M, M') مباشرة.

خواص هذه التحويلات النقطية:

كل هذه التحويلات النقطية (التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب والدوران) تحافظ على الأشكال، المسافات، استقامية النقط وأقياس الزوايا.

الهندسة في الفضاء:

المستقيم والمستوي في الفضاء:

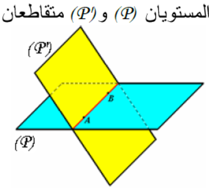
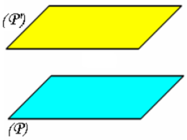
- إذا كانت نقطتان A و B متمايزتين فإنّه يوجد مستقيم وحيد يشملهما.
- إذا كانت ثلاث نقط A ، B و C ليست في استقامية فإنّه يوجد مستو وحيد يشملها.
- إذا شمل مستو نقطتين متمايزتين A و B فإنّه يشمل كل نقط المستقيم (AB).

نتيجة: يتعيّن المستوي

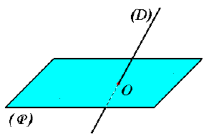
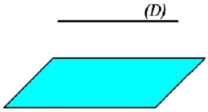
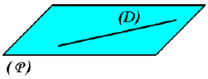
- إمّا بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
- وإمّا بمستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم.
- وإمّا بمستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين.

الأوضاع النسبية لمستويين – لمستقيمين – لمستقيم ومستو

- كل مستويين من الفضاء هما: إمّا متقاطعان وإمّا متوازيان.

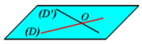
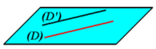
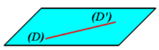
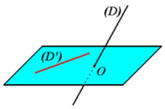
المستويان $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ متقاطعان	المستويان $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ متوازيان	
		
كلّ نقط المستقيم (AB) مشتركة بينهما.	لا توجد بين $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{P}')$ أيّة نقطة مشتركة.	للمستويين نفس النقط. $(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}')$

- كل مستقيم ومستو من الفضاء هما: إمّا متقاطعان وإمّا متوازيان.

المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) متقاطعان	المستوي $(\mathcal{P})$ والمستقيم (D) متوازيان	
		
توجد بين $(\mathcal{P})$ و (D) نقطة مشتركة وحيدة O.	لا توجد بين $(\mathcal{P})$ و (D) أيّة نقطة مشتركة.	كلّ نقط المستقيم تنتمي إلى المستوي. $(\mathcal{P})$ يحتوي على (D)

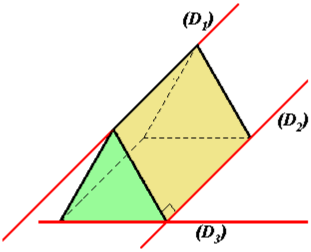
- كل مستقيمين من الفضاء هما: $\left\{\begin{array}{l}\text{إمّا متقاطعان}\\ \text{وإمّا متوازيان}\end{array}\right.$ فهما من مستو واحد .

وإمّا ليسا من مستو واحد.

(D) و (D') متقاطعان	(D) و (D') متوازيان		ليسا من مستو واحد
			
توجد بين (D) و (D') نقطة مشتركة وحيدة O.	لا توجد بين (D) و (D') أيّة نقطة مشتركة.	المستقيمان (D) و (D') متطابقان. $(D) = (D')$	لا توجد بين (D) و (D') أيّة نقطة مشتركة.

المستقيمات المتوازية في الفضاء

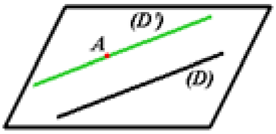
المستقيمان المتوازيان في الفضاء هما مستقيمان متطابقان،
أو من نفس المستوي وغير متقاطعين.



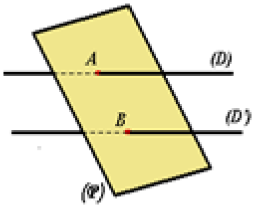
- (D_1) و (D_2) متوازيان
- (D_2) و (D_3) متعامدان
- (D_1) و (D_3) لا ينتميان لنفس المستوي

خواص

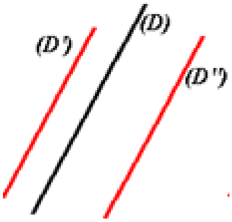
① يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستقيما معلوما.
② إذا قطع مستو أحد مستقيمين متوازيين فإنّه يقطع الآخر.
③ المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.



①



②



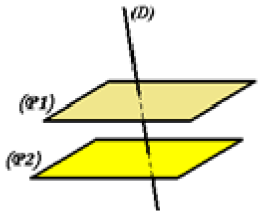
③

المستويات المتوازية

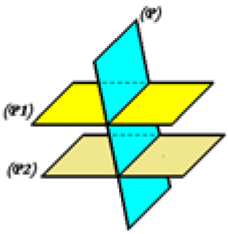
المستويان المتوازيين هما مستويان متطابقان، أو منفصلان (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة).

خواص

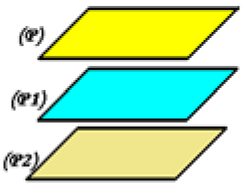
① يوجد مستوٍ وحيد يشمل نقطة معلومة ويوازي مستويا معلوما.
② إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنّه يقطع الآخر.
③ إذا قطع مستوي أحد مستويين متوازيين فإنّه يقطع الآخر، ويكون مستقيما التقاطع متوازيان.
④ المستويان الموازيان لثالث متوازيان.



②



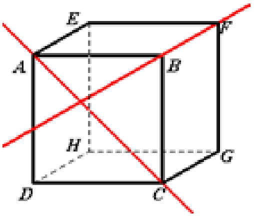
③



④

المستقيمات والمستويات المتوازية

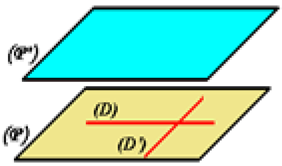
يكون مستقيم ومستو متوازيين إذا كانا منفصلين (لا توجد بينهما أيّة نقطة مشتركة)، أو كان المستقيم محتويا في هذا المستوي.



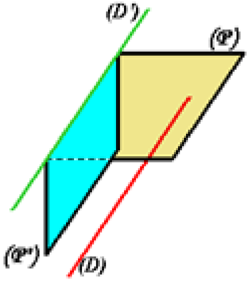
- المستقيم (AC) يوازي المستويين $(ABCD)$ و$(EFGH)$
- المستقيم (BF) يوازي كل من المستويات $(ABFE)$ ، $(BCGF)$ ، $(ADHE)$ و$(CDHG)$

خواص

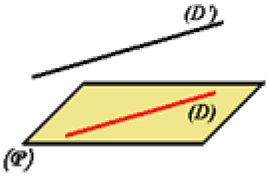
① يكون مستقيم مواز لمستو إذا وفقط إذا كان موازيا لمستقيم من هذا المستوي.
② إذا كان مستقيم يوازي أحد مستويين متوازيين فإنه يوازي المستوي الآخر.
③ إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما.
④ يتوازى مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين كلّ منهما يوازي المستوي الآخر .
⑤ المستويان الموازيان لثالث متوازيان.



④



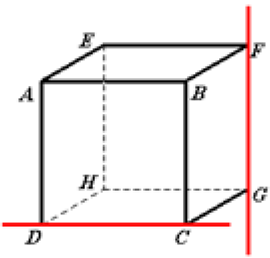
③



①

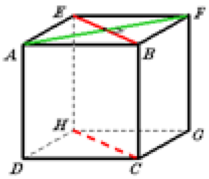
تعامد المستقيمات في الفضاء

نقول عن مستقيمين أنّهما متعامدان إذا كان موازياهما المرسومان من نفس النّقطة متعامدين.



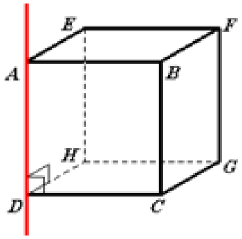
- المستقيم (DC) يعامد كل من المستقيمات (AD) ، (BC) ، (FH) ، (FG) ، (AE) ، (BF) ، (DH) و(CG)
- المستقيم (FG) يعامد كل من المستقيمات (AE) ، (BF) ، (CG) ، (DH) ، (AB) ، (EF) ، (DC) و(HG)

خواص



① المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر.
② المستقيمان الموازيان لمستقيمين متعامدين متعامدان.

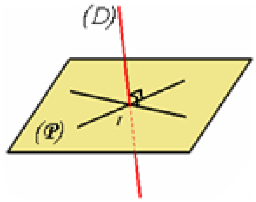
تعامد المستقيمات والمستويات



نقول عن مستقيم إنه عمودي على مستو إذا كان هذا المستقيم عموديا على كلّ مستقيمات هذا المستوي.

المستقيم (AD) يعامد المستويين $(ABEF)$ و$(DCGH)$

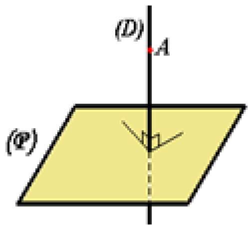
مبرهنة



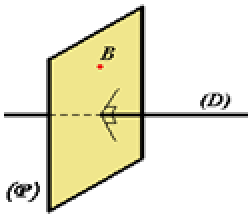
إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فإنّه عمودي على كلّ مستقيمات هذا المستوي.

خواص

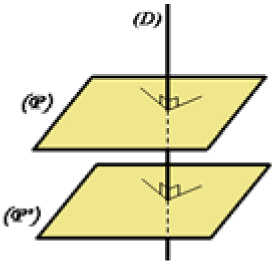
① يوجد مستقيم وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستوٍ معلوما.
② يوجد مستو وحيد يشمل نقطة معلومة ويعامد مستقيما معلوما.
③ المستويان العموديان على نفس المستقيم متوازيان.
④ المستقيمان العموديان على نفس المستوي متوازيان.
⑤ المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر.
⑥ المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عمودي على الآخر.



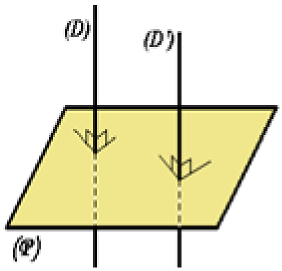
①



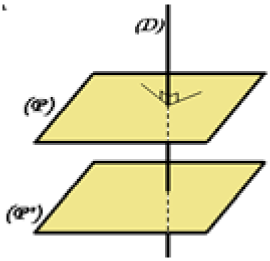
②



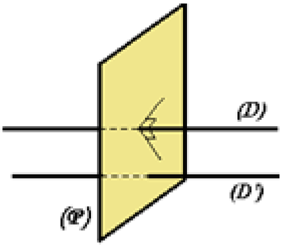
③



④



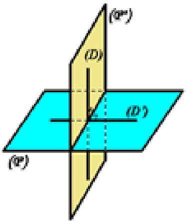
⑤



⑥

تعامد المستويات

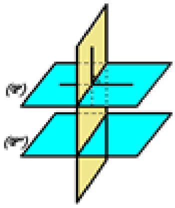
نقول عن مستويين أنّهما متعامدان إذا شمل أحدهما مستقيما عموديا على الآخر



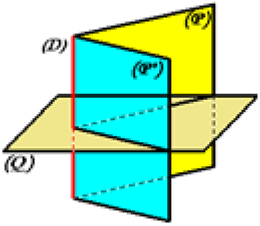
خواص

① المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر.

② إذا كان (P) و(P') مستوين متقاطعين وكان كلّ منهما عموديا على مستو ثالث (Q) فإنّ مستقيم تقاطع المستويين (P) و(P') عمودي على المستوي (Q).



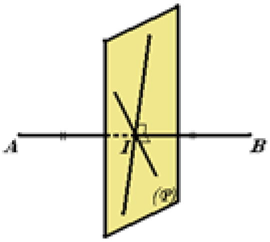
①



②

المستوي المحوري لقطعة مستقيم:

A، B نقطتان متمايزتان، نسمي مستويا محوريا للقطعة $[AB]$ المستوي العمودي على (AB) الذّي يشمل منتصف $[AB]$.



مبرهنة

مجموعة نقط الفضاء المتساوية المسافة عن نقطتين متمايزتين A، B هي المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.

ملاحظة : كل الرسوم الواردة في هذا الدرس مأخوذة من الكتاب المدرسي.

الاعتبارات

الفصل

الأول

الموضوع الأول

التمرين الأول :

أجب بصحيح أم خاطئ مع التعليل :

1. $\frac{3-10^{-14}}{2} > \frac{3-10^{-15}}{2}$.
2. إذا كان $a + b = 0$ فإنّ : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$ ، حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}^*$.
3. المدوّر إلى 10^{-2} للعدد $\frac{0,7\times10^{-4}}{14\times10^{-2}}$ يساوي 0,01.
4. مجموعة حلول المعادلة $|x-1| = -2$ هي : $S = \{-1; 4\}$.
5. 2 هو مركز المجال [3 ; 1].
6. رتبة مقدار العدد $-17,23\times10^{-2}$ هي -2×10^{-1}.
7. إذا كان $-2 \le x \le 4$ فإنّ $d(x\,;1) \le 6$.
8. إذا كان a و b طول ضلعي مثلث قائم حيث :
$a = \sqrt{3}(1+\sqrt{6})$ و $b = 3-\sqrt{6}$ ، فإنّ طول الوتر c عدد طبيعي.
9. العدد $5(n+1)$ غير أولي حيث : $n\in\mathbb{N}$ و $n > 1$.
10. إذا كان $-2 \le x^2 \le 4$ فإنّ $x \in [1; 2]$.

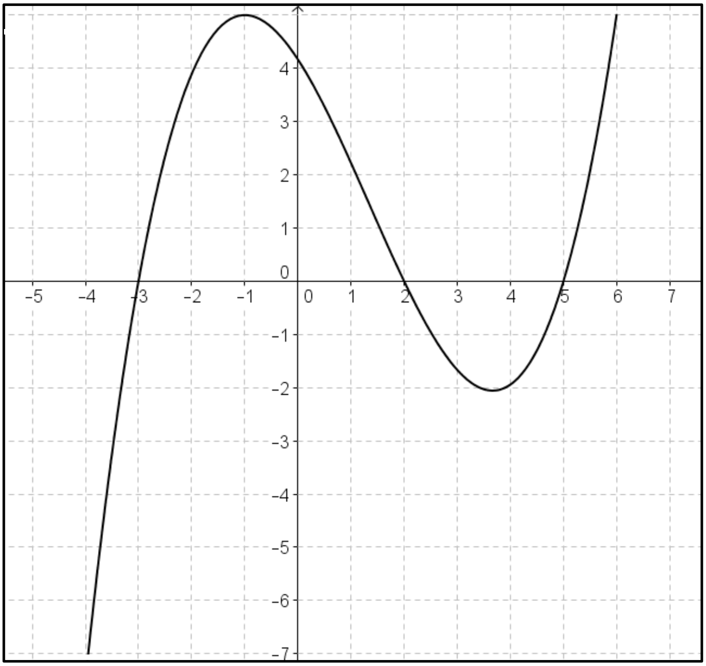
التمرين الثاني :

لتكن I مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث : $-3 < x < -1$ ، و المجال $J = [-2\,; +\infty[$.

1. أكتب المجموعة I على شكل مجال.
2. هل العدد الحقيقي x^2 ينتمي إلى المجال J إذا كان x ينتمي إلى المجال I ؟
3. عين المجموعتين $I \cup J$ و $I \cap J$.
4. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $|x-1| = |x+2|$
5. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $|x+2| < 1$ ، ثمّ استنتج مجموعة حلول المتراجحة $|x+2| \ge 1$.
6. هل مجموعة حلول المتراجحة $|x+2| < 1$ هي المجال I ؟

التمرين الثالث :

الشكل المقابل هو تمثيل بياني لدالة f.



1. عيّن مجموعة تعريف الدالة f.
2. عيّن صور الأعداد : 4- ، 1- ، 2 ، 6 بالدالة f.
3. عيّن سوابق الأعداد : 7- ، 0 ، 5 ، 6 بالدالة f.
4. شكّل جدول تغيرات الدالة f .

التمرين الرابع :

انقل واكمل الجدول التالي :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
			$-5 \leq x \leq 3$
		$x \in [-2; 5]$	
	$d(x; -8) < 2$		
$\left\|x + \frac{2}{3}\right\| < 1$			

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

أكمل الجدول التالي :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$-3 \leq x \leq 7$			
	$x \in [-5\ ;\ 1]$		
		$d\left(x;\frac{7}{2}\right) < \frac{5}{2}$	
			$\left\lvert x - \frac{3}{5}\right\rvert \leq \frac{3}{5}$

التمرين الثاني :

I- لتكن المجموعتين K و L حيث :
$$K = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x+3| \leq 2\}$$
$$L = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |2x+1| \geq 3\}$$

1. أكتب كلا من المجموعتين K و L على شكل مجال.
2. عيّن المجموعتين $K \cup L$ و $K \cap L$.

II- على مستقيم (Δ) مزوّد بمعلم $(O;\vec{i})$:

1. علّم النقطتين A و B اللتين فاصلتاهما 4- و 8 على الترتيب و علّم النقطة J منتصف القطعة [AB].
2. لتكنM نقطة متحركة على المستقيم (Δ) فاصلتها x. عيّن قيم العدد x من أجل كل حالة مما يلي :

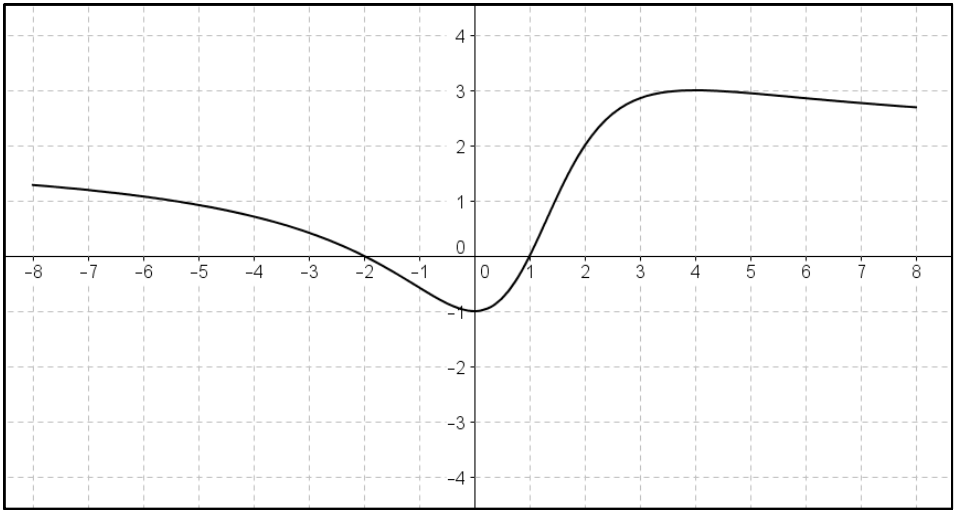
أ. $|x+4| = |x-8|$

ب. $|x+4| > |x-8|$

ج. $|x+4| + |x-8| = 12$.

التمرين الثالث :

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة في المجال [8 ; 8-]



1. ما هي صور الأعداد الحقيقية : 0 ، 2- ، 4 وفق الدالة f؟
2. ما هي سوابق الأعداد الحقيقية : 0 ، 2 ، 3- ؟
3. حدد اتجاه تغير الدالة f .
4. عين إشارة $f(x)$ ، ثم استنتج حلول المتراجحة : $f(x) \geq 0$.

التمرين الرابع :

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $xy \neq -1$. نضع : $A = \frac{x+y}{1+xy}$

1. احسب A من أجل $x = \frac{1}{3}$ و $y = -\frac{2}{5}$
2. احسب $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$
3. نضع : $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ و $y = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$. بيّن أنّ $A = \sqrt{3}$
4. بيّن أنّه من أجل كل x و y حيث $xy \neq -1$ ، فإنّ :

$$1 + A = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} \quad \text{و} \quad 1 - A = \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}$$

الموضوع الثالث

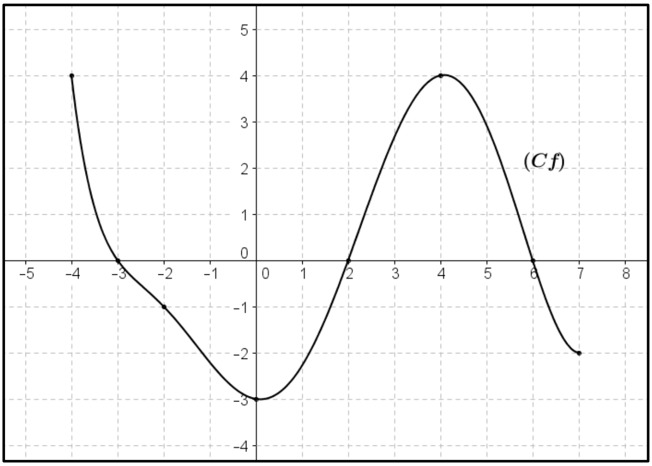
التمرين الأول :

انقل واكمل الجدول التالي :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$-2 < x < 4$			
	$x \in]-5;7[$		
		$d(x;-2) \leq 2$	
			$\left\lvert x - \frac{3}{2} \right\rvert \leq \frac{5}{2}$

التمرين الثاني :

التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل الموالي.



بقراءة بيانية أجب على ما يلي :

1. عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. عيّن سوابق العدد 0 بالدالة f
3. انقل ثم اكمل الجدول التالي :

x	-6	-2			2	4	7	10
$f(x)$			-3	4				

4. عيّن حلول المعادلات التالية :
   أ. $f(x) = -4$
   ب. $f(x) = 0$
   ج. $f(x) = 4$
5. شكّل جدول تغيّرات الدالة f
6. شكّل جدول إشارة الدالة f
7. عيّن بيانيا حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$.

التمرين الثالث :

ليكن L عدد حقيقي حيث : $L = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

1. قارن العددين $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ و $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$
2. بيّن أنّ إشارة العدد L موجبة
3. احسب L^2 ، ثمّ استنتج قيمة مبسّطة للعدد L.

التمرين الرابع :

ليكن x عدد حقيقي حيث : $\left|x - \frac{5}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$

1. أثبت أنّ $1 \leq x \leq 4$
2. عيّن حصرا لكل من العددين :
   أ. $x^2 + 2x - 3$
   ب. $\frac{\sqrt{x}}{x+2}$

الموضوع الرابع

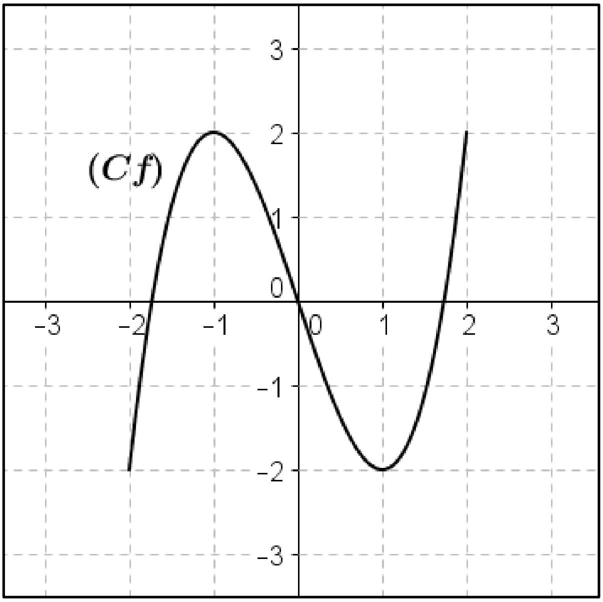
التمرين الأول :

أجب بصحيح أم خاطئ مع التعليل على ما يلي :

1. $0,2 < (0,2)^2 < (0,2)^3$.
2. $1,2 > (1,2)^2 > (1,2)^3$.
3. $-0,2 < -0,2^2 < -0,2^3$.
4. $\frac{1}{3} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{3^3}$.
5. $|x-2| \leq 1$ معناه $1 \leq x \leq 3$ حيث x عدد حقيقي.
6. $|2-x| \leq 1$ معناه $x \in [1;\ 3]$ حيث x عدد حقيقي.

التمرين الثاني :

I- الشكل المقابل عبارة عن تمثيل بياني لدالة f.



1. عيّن مجموعة تعريف الدالة f
2. عيّن صور الأعداد :2- ، 1- ، 0 ، 1
3. عيّن سوابق العددين : 2- و 2
4. شكّل جدول تغيرات الدالة f
5. عيّن القيم الحدّية للدالة f

II- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

1. بيّن أنّ g دالة زوجية
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-\infty; 0]$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيّرها على المجال $[0; +\infty[$.

التمرين الثالث :

x و y عددان حقيقيان يحققان الشرطين التاليين: $2x + y \in [-2; 5]$ وَ $x + 2y \in [1; 7]$.
الهدف من التمرين هو إيجاد أصغر مجال يشمل في آن واحد x و y .

1. أثبت أن : $-1 \leq 3x + 3y \leq 12$.
2. استنتج حصرا للعدد $x + y$ ثمّ حصرا للعدد $-x - y$.
3. استعمل النتائج السابقة لحصر العدد x ثمّ لحصر العدد y (أكتب النتائج على شكل مجالات).
4. استنتج أصغر مجال يشمل x و y في آن واحد.

التمرين الرابع :

ABCD شبه منحرف قائم حيث (AB) // (CD) ، AB = 8 ، AD = 4 ، DC = 5
وَ $B\hat{A}D = 90°$.

1. احسب مساحة شبه المنحرف ABCD.
2. لتكن M نقطة من [DC] وF المسقط العمودي لـ M على (AB) ، نضع : $DM = x$.
   أ. ما هي القيم الممكنة للعدد x ؟
   ب. نسمي $f(x)$ مساحة المستطيل ADMF. أحسب $f(x)$ بدلالة x .
3. نسمي $g(x)$ مساحة شبه المنحرف BCMF.
   أ. أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x .
   ب. أنشئ في نفس المعلم المنحنيين الممثلين للدالتين f و g.
   ج. استنتج بيانيا حلول المعادلة: $f(x) = g(x)$.

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1. احسب $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+2\right)^2$
2. استنتج تبسيطا للعدد $\left|2\sqrt{3}-2\right| - \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$
3. α عدد حقيقي من المجال $[-4;-2]$. نضع : $x = -\frac{1}{2}\alpha - 1$

عيّن حصرا للعدد x ، ثمّ قارن بين الأعداد x ، x^2 و x^3.

التمرين الثاني :

1. قارن العددين A و B حيث : $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ وَ $B = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.
2. علما أنّ $1 < x < \frac{3}{2}$. قارن العددين $(-2x+3)$ وَ $(-2x+3)^2$.
3. مثلث مساحته S محصورة بين $51\ cm^2$ و $52\ cm^2$ ، وقاعدته محصورة بين $7{,}9\ cm$ وَ $8{,}9\ cm$. اعط حصرا لارتفاعه h.

التمرين الثالث :

انقل واكمل الجدول التالي :

الحصر	المجال	المسافة	القيمة المطلقة
$-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$			
	$x \in]3;5[$		
		$d(x;5) \leq 10^{-2}$	
			$\lvert x-3\rvert < 2$

التمرين الرابع :

ليكن ABC مثلث قائم في A حيث : $AB = 4\ cm$ وَ $BC = 5\ cm$. N نقطة حرّة من القطعة [AC].

المستقيم الذي يشمل N ويوازي (AB) يقطع [BC] في H حيث $AN = x\ cm$، x عدد حقيقي. (أنظر الشكل)

الجزء الأول :

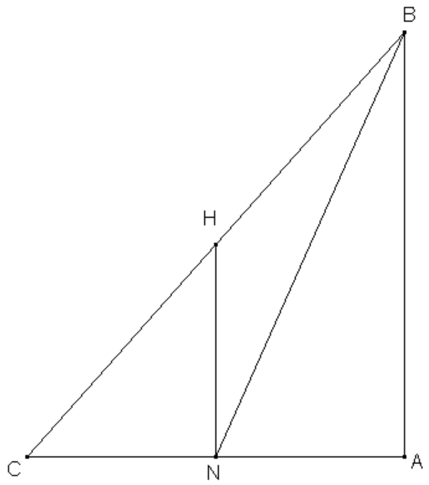
1. ما هي القيم الممكنة لـ x ؟
2. أوجد طول القطعة [NH] بدلالة x.

3. عبّر عن مساحة المثلث ABN بدلالة x.
4. عبّر عن مساحة شبه المنحرف ABHN بدلالة x.
5. استنتج مساحة المثلث BHN بدلالة x.

الجزء الثاني :

نضع الآن $f(x) = A_{BHN}$ ، حيث A يرمز للمساحة.

1. أوجد دستور $f(x)$، ثمّ اكتب $f(x)$ بالشكل $m(x - a)^2 + b$.
2. عيّن قيمة x حتى تكون مساحة المثلث BHN أكبر ما يمكن.
3. احسب $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1,5)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$.
4. شكّل جدول تغيرات الدالة f.
5. ارسم التمثيل البياني للدالة f.



الموضوع السادس

التمرين الأول :

عيّن الإجابة الصحيحة مع التعليل.

1. العدد $\sqrt{1-\frac{12}{13}} \times \sqrt{1+\frac{12}{13}}$ هو :

أ) عشري ؛ ب) ناطق ؛ ج) أصمّ

2. $a = 6{,}2 \times 10^{-2}$ وَ $b = 4{,}5 \times 10^{6}$. الكتابة العلمية للعدد $a \times b$ هي :

أ) $2{,}79 \times 10^{5}$ ؛ ب) $27{,}9 \times 10^{-4}$ ؛ ج) $2{,}79 \times 10^{4}$

3. الكتابة المبسّطة للعدد $\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$ هي :

أ) $4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ ؛ ب) $4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$ ؛ ج) $2\sqrt{2}$

4. الشكل المبسّط للعدد $\dfrac{\frac{1}{5}\left(3-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{5}-\frac{4}{6}}$ هو :

أ) $\frac{7}{15}$ ؛ ب) $-\frac{27}{4}$ ؛ ج) $\frac{9}{30}$

التمرين الثاني :

1. أثبت صحة المبرهنة التالية :
إذا كان $a \geq 1$ فإنّ $a^3 \geq a^2 \geq a$ ، حيث a عدد حقيقي.
2. x عدد حقيقي و $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$.
   أ. عيّن حصرا للعدد : $6 - 5x$.
   ب. قارن الأعداد : $(6-5x)^3$; $(6-5x)^2$; $(6-5x)$.

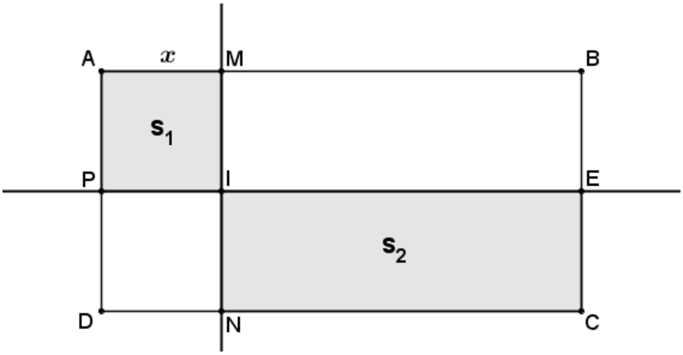
التمرين الثالث :

A ، B نقطتان من المستقيم العددي المزوّد بالمعلم $(O; \vec{i})$ فاصلتيهما 3 و 3- على الترتيب.M نقطة فاصلتها x.

1. عيّن قيم x بحيث يكون :
   أ. $d(x\,;3) = 4$.
   ب. $|x-3| \leq |x+3|$.
2. عيّن موضع النقطة M ثمّ عيّن قيم x بحيث يكون: MA + MB = 6.

التمرين الرابع :

ABCD مستطيل بعداه: $8\ cm$ وَ $4\ cm$. M نقطة من [AB] وَ P نقطة من [AD] وَ I نقطة تقع داخل المستطيل ABCD بحيث يكون الرباعي AMIP مربعا طول ضلعه x. المستقيم (MI) يقطع [DC] في N و المستقيم (PI) يقطع [BC] في E. (انظر الشكل)



1. إلى أيّ مجال ينتمي x ؟
2. ما طبيعة الرباعي IECN ؟
3. لتكن S_1 مساحة المربع AMIP و S_2 مساحة الرباعي IECN.
   أ. ما هي قيم x بحيث : $S_1 = S_2$ ؟
   ب. من أجل أيّ قيم لـ x تكون $S_2 > S_1$ ؟

الموضوع السابع

التمرين الأول :

1. قارن العددين $3\sqrt{3}$ و $2\sqrt{7}$.
2. أحسب $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2$.
3. نضع $x = \sqrt{55-12\sqrt{21}}$. استنتج كتابة مبسطة للعدد x.
4. عيّن حصرا للعدد x علما أنّ: $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ وَ $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$.

التمرين الثاني :

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين :
   أ. $|x-5| = 3$.
   ب. $|x-3| = |x+1|$.
2. باستعمال المسافات حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين :
   أ. $|x-4| < 2$.
   ب. $|x+1| \leq |x-2|$.

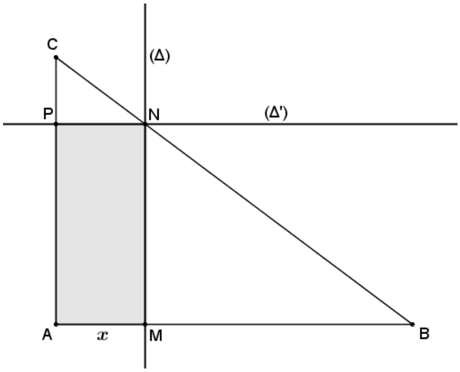
التمرين الثالث :

g دالة معرفة على المجال [-3 ; 1] حيث : $g(x) = x^2 + 2x - 3$

1. تحقق أن : $g(x) = (x+1)^2 - 4$.
2. عيّن سابقة العدد 0.
3. بيّن أنّ الدالة g متناقصة على المجال [-3 ; -1] و متزايدة على المجال [-1 ; 1] ، ثمّ استنتج جدول تغيراتها.
4. عين القيمة الحدية الصغرى .

التمرين الرابع :

ABC مثلث قائم في Aحيث : AB = 8*cm* ، AC = 6*cm* و BC = 10 *cm*.
M نقطة من [AB] بحيث : AM = *x*.
(Δ) مستقيم يشمل M و يوازي (AC) يقطع [BC] في N ، (Δ') مستقيم يشمل N و يوازي (AB) يقطع [AC] في P. (انظر الشكل)



نسمي f الدالة التي ترفق بكل x محيط المستطيل NMAP.

1. إلى أيّ مجال ينتمي x ؟
2. أوجد عبارة $f(x)$ بدلالة x.
3. مثّل بيان الدالة f.
4. حدّد بيانيا القيمة التقريبية للعدد x التي من أجلها تكون $f(x) = 15$ ، ثمّ تحقق من النتيجة حسابيا.

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

أجب بصحيح أو خطا على الجمل التالية مع التعليل:

1. العدد $\left(\sqrt{7}+3\right)^2 - 6\sqrt{7}$ عدد صحيح.
2. إذا كان $2 < x$ فإن $4 < x^2$.
3. إذا كان $1{,}5 < a < 1{,}6$ فإن $1{,}25 < a^2 - 1 < 1{,}56$.
4. من أجل كل عدد حقيقي x يكون $x^2 > x$.

التمرين الثاني:

المستقيم (d) مزوّد بمعلم خطي $(O,\vec{i})$، M نقطة من المستقيم (d) فاصلتها x و A ، B نقطتان من (d) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3-.

1. مثل النقطتين A وB في المعلم $(O,\vec{i})$.
2. باستعمال المسافة عيّن قيم العدد الحقيقي x في كل ما يلي :

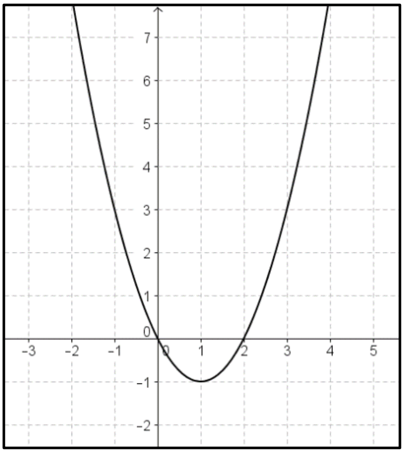
أ. $|x-1| = 3$

ب. $|x-1| = |x+3|$

ج. $|x-1| \leq |x+3|$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالدستور: $f(x) = x^2 - 2x$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.



الجزء الأول: بقراءة بيانية:

1. عيّن صور الأعداد 1 ، 3 و 0.
2. عيّن حلول المعادلة $f(x) = 3$.
3. عيّن إشارة $f(x)$.
4. شكل جدول تغيرات الدالة f.

الجزء الثاني: لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = x^2 - 2|x|$
و (γ) تمثيلها البياني في نفس المعلم.

1. أثبت أنّ h دالة زوجية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (γ) ؟
2. أثبت أنّ $h(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه.
3. أرسم المنحنى (γ) مستعينا بالمنحنى $(\mathscr{C})$.

التمرين الرابع:

ABC مثلث كيفي حيث: $BC = 8$، $C\hat{B}A = 30°$ و $B\hat{C}A = 45°$. M نقطة كيفية من $[BC]$، نضع $BM = x$. النقطة H المسقط العمودي للنقطة M على (AB) و النقطة K هي المسقط العمودي لـ Mعلى (AC). لتكن g الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال $[0 ; 8]$ العدد $g(x)$ حيث : $g(x) = MH + MK$.

1. ارسم المثلث ABC.
2. أثبت أنّ: $g(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}x + 4\sqrt{2}$.
3. ارسم المنحنى الممثل للدالة g .
4. حلّ المعادلة: $g(x) = 3\sqrt{2}$.

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. أنشر و بسط العبارة E حيث : $E = \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2$ ، ثمّ استنتج تبسيطا للعدد $\sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$.
2. بيّن أنّ : $\left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2 = 4$ ، ثمّ استنتج قيمة العدد $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$.
3. نضع : $x = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3^{-1}\right]^{-1}$ وَ $y = \frac{2^7 \times 5^{-2} \times 10^{-4}}{5^{-7} \times 4^2}$.
   بيّن أنّ : $x = 9$ وَ $y = \frac{5}{2}$.

التمرين الثاني :

بئر على شكل أسطوانة ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها الدائرية r حيث :

$$50{,}8 \leq h \leq 50{,}9 \ \text{،}\ 3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15 \ \text{،}\ 4{,}3 \leq r \leq 4{,}4$$

1. عيّن حصرا لمساحة القاعدة $\mathcal{B}$
2. عيّن حصرا لحجم البئر $\mathcal{V}$
3. تمّ ملء $\frac{3}{4}$ من حجم البئر بالماء. اعط حصرا لحجم الماء. يُعطى : $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$

1. أدرس شفعية الدالة f.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ ، ثمّ استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
3. عيّن جدولا لبعض قيم f ثمّ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. نعتبر الدالة التآلفية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x + 3$.
   أ. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في نفس المعلم السابق.
   ب. حلّ بيانيا المعادلات و المتراجحة التالية : $f(x) = g(x)$ ؛ $f(x) = 0{,}4$ ؛ $g(x) = 0$ ؛ $f(x) \geq g(x)$.

التمرين الرابع :

1. اكمل الجدول التالي :

I	J	$I \cap J$	$I \cup J$
$[2;6]$	$[5;10]$		
$]-\infty;-3[\ \cup\ ]3;+\infty[$	$]-1;1[$		
$]-\infty;0[$	$]-5;+\infty[$		

2. x و y عددان حقيقيان حيث : $x < y$. ضع مكان الفراغ أحد الرمزين $>$ أو $<$:

$$x-7 \quad\quad y-7 \quad ، \quad -2x-9 \quad\quad -2y-9 \quad ، \quad \frac{1}{2y} \quad\quad \frac{1}{2x}$$

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

1. ليكن a و b عددين حقيقيين غير معدومين.
بسّط العدد الحقيقي A حيث : $A = 2 + \frac{\left(12a^2b^3\right)^{-1}\left(\sqrt{3}ab\right)^3}{0,25\ a}$
2. ليكن العدد الحقيقي B حيث : $B = 2 + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{27} - \sqrt{147}$
أ. بيّن أنّ $B = 2 - \sqrt{3}$
ب. احسب الجداء $A \times B$. ماذا يمكن القول عن العددين A و B ؟
ج. استنتج قيمة $\frac{1}{A} - \frac{1}{B}$
3. ليكن العدد الحقيقي C حيث : $C = |5 - 2\pi| + \left|2 - \sqrt{3}\right| + \left|2 + \sqrt{3}\right| - \pi$
اكتب العدد الحقيقي C بدون رمز القيمة المطلقة ، ثمّ بسّطه.

التمرين الثاني :

انقل ثمّ اكمل الجدول التالي :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
			$-1 \leq x \leq 2$
		$x \in]1\ ;\ 3[$	
	$d(x;1) \leq 4$		
$\|x+5\| < 3$			

التمرين الثالث :

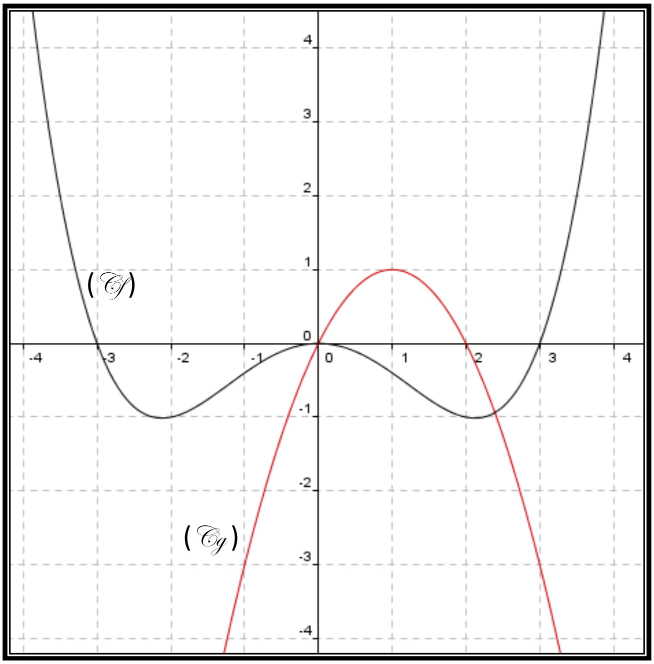
a و b عددان حقيقيان حيث : $a = 3\sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{7}$

1. بيّن أنّ : $a - b = -\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$ ، ثمّ استنتج مقارنة بين العددين a و b
2. بسّط العدد $\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2$
3. استنتج كتابة مبسّطة للعدد x حيث : $x = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}}$
4. اعط حصرا للعدد x علما أنّ : $2,6 \leq \sqrt{7} \leq 2,7$ و $1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8$.

التمرين الرابع :

f و g دالتان معرّفتان على $\mathbb{R}$ بيانيا كما هو موضّح في الشكل التالي :

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : $f(x) \geq 0$ ؛ $g(x) \leq 0$ ؛ $f(x) \leq g(x)$.
2. استنتج جدول الإشارة للدوال f ، g و $f-g$.
3. حلّ وناقش بيانيا حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلتين : $f(x) = m$ وَ $g(x) = m$.



الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

1. هل العدد 379 أولي؟
2. حلل كلا من العددين 1782 و 999 إلى جداء عوامل أولية.
3. استنتج $PGCD(1782; 999)$ و $PPCM(1782; 999)$.
4. نضع: $A = 1{,}783783\ldots$.
   أ. حدد طبيعة العدد A ثمّ عيّن الكتابة الكسرية له.
   ب. استنتج الشكل غير قابل للاختزال للعدد A.

التمرين الثاني :

1. عيّن المجالات التالية:
   ① $[-11; 7] \cap [-9; +\infty[$ ، ② $[-11; 7] \cup]-3; 20]$
   ③ $([5; 7] \cup [-4; +\infty[) \cap]-3; 20]$
2. a و b عددان حقيقيان حيث: $3 \leq a \leq 2$ و $-4 \leq b \leq -3$
   جد حصرا للأعداد التالية: $3a$ ، b^2 ، $3a + b^2$ ، $-2b$ ، $a - 2b$ ، $\frac{1}{a-2b}$.

التمرين الثالث :

نعتبر العبارتين الآتيتين: $P(x) = |x + 1| - 2$ و $Q(x) = |x - 4| + 2$

1. احسب $P\left(\frac{1}{3}\right)$ ، $Q\left(\sqrt{3} + 2\right)$.
2. حل المتراجحة $Q(x) - 2 \leq P(x) + 2$.
3. نضع: $A(x) = P(x) + Q(x)$
   أ. اكتب $A(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
   ب. حل المعادلة $A(x) = 12$.

التمرين الرابع :

f دالة معرّفة بجدول تغيراتها الآتي:

x	-4	-1	0	1	3	5
	$1,5$				2	
$f(x)$	↘	0	↘ ↗	0	↗ ↘	
			-2			1

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة f.
2. حدد اتجاه تغيّر الدالة f.
3. اذكر القيم الحدّية المحلية للدالة f.
4. حل في المجال $[-4;5]$ المعادلة $f(x)=0$.
5. حدد إشارة الدالة f على المجال $[-4;5]$.
6. قارن بين العددين $f(-3)$ ، $f(-2)$ وبين العددين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $f(2)$ مع التعليل.
7. ارسم المنحنى البياني للدالة f على المجال $[-4;5]$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
8. حدد شفعية الدالة f.

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

1. a و b عددان حقيقيان حيث: $\left|a-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ و $2<b<3$

أ. بيّن أنّ : $1<a<2$.

ب. أعط حصرا للأعداد: ab، a^2+b^2 ، $\frac{ab}{a^2+b^2}$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية:

$$|x-3|=7 \quad ، \quad |x+2|\leq 5 \quad ، \quad |x+1|\leq|x-1|$$

3. نعتبر في $\mathbb{R}$ المجموعات التالية:

$$I=\{x\in\mathbb{R};|x-1|\leq|x-2|\} \text{ ، } J=\{x\in\mathbb{R};-3<x<5 \text{ و } 2<x<8\}$$

$$L=\left\{x\in\mathbb{R}-\{4\};-1\leq\frac{2x-3}{4-x}\leq 3\right\}$$

أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 4 فإنّ: $\frac{2x-3}{4-x}=-2+\frac{5}{4-x}$

ب. اكتب المجموعات I ، J و L على شكل مجالات.

ج. عيّن: $I\cap J$ و $L\cup J$.

التمرين الثاني :

أكمل الجدول التالي:

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر	نصف القطر	المركز
		$x\in[-0,8;2,4]$			
			$-5<2x-1<7$		
				$0,2$	$1,1$
$\|2x-6\|<4$					
	$d\left(x;\frac{4}{5}\right)\leq\frac{1}{5}$				

التمرين الثالث :

A ، B و C ثلاثة أعداد حقيقية حيث: $A=2\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$B=2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)+2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-4\right) \quad \text{و} \quad C=\sqrt{35+10\sqrt{10}}$$

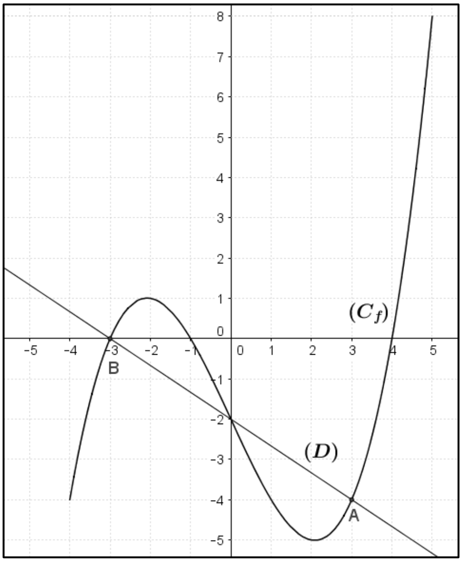
1. بيّن أنّ : $A=2+\sqrt{5}$ و $B=2-\sqrt{5}$ ، ثمّ احسب $A\times B$.
2. استنتج قيمة $A^{2019}\times B^{2018}$ ومقلوب العدد A.
3. انشر العدد $\left(5+\sqrt{10}\right)^2$ ، ثمّ استنتج قيمة مبسّطة للعدد C.

4. برهن صحة المساواة: $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-1$

5. بيّن أنّ : $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ ، ثمّ اكتب على أبسط شكل ممكن العدد K حيث:

$$K=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

التمرين الرابع :



لتكن الدالة f المعرّفة على المجال $[-4;5]$ بتمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(O,\vec{i},\vec{j})$.

بقراءة بيانية:

1. عيّن صورتي العددين -1 و2.
2. عيّن السوابق الممكنة للعددين -6 و-4.
3. عيّن القيم الحدّية للدالة f. من أجل أي قيمة للمتغيّر x نتحصل عليها؟
4. شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4;5]$.
5. حل بيانيا المتراجحة: $f(x)\le 0$.
6. عيّن g الدالة التآلفية الممثلة بالمستقيم (D) والذي يشمل النقطتين $A(3;-4)$ و$B(-3;0)$.
7. شكل جدول تغيرات وجدول إشارة الدالة g.
8. حل بيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$ والمتراجحة: $f(x)\le g(x)$.

أسئلة متعددة الاختيارات

عيّن الإجابة الصحيحة من بين الأجوبة المقترحة مع التعليل :

1. إذا كان $x = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ، فإنّ :

$x = y$	$x < y$	$x > y$

2. العدد $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{400}$ ينتمي إلى :

$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{D}$

3. العدد $\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2$ يساوي :

$47+6\sqrt{10}$	$17+6\sqrt{10}$	17

4. ضعف مربّع مجموع العددين a و b هو :

$(2a+2b)^2$	$2(a+b)^2$	$2a^2+2b^2$

5. إذا كان $x = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$ و $y = 1-\sqrt{2}$ ، فإنّ :

$x = y$	$x < y$	$x > y$

6. الكتابة العلمية للعدد 0,000358 هي :

$35{,}8 \times 10^{-5}$	$3{,}58 \times 10^{-4}$	358×10^{-6}

7. الكتابة العلمية للعدد $a \times b$ حيث : $a = 4 \times 10^{-3}$ و $b = 3 \times 10^{-2}$ هي :

$1{,}2 \times 10^{-4}$	12×10^{-5}	$0{,}12 \times 10^{-7}$

8. رتبة مقدار العدد b حيث $b = 4 \times (10^2)^{-3} \times 4{,}5 \times 10^8 \times 10^{-7}$ هي :

18×10^{-5}	$0{,}18 \times 10^{-5}$	2×10^{-4}

9. إذا كان $I = [-1;2[\cup [3;7[$ ، فإنّ :

$7 \in I$	$-8 \in I$	$\frac{9}{2} \in I$

10. إذا كان $I = [-1;2[\cup [3;7[$ و $J = [0;4]$ ، فإنّ :

$I \cap J = [0;2] \cup [3;4]$	$I \cap J = [0;2[\cup [3;4]$	$I \cap J = [0;3]$

11. إذا كان $I = [-1;2[\cup [3;7[$ و $J = [0;4]$ ، فإنّ :

$I \cup J = [-1;4[$	$I \cup J = [0;7]$	$I \cup J = [-1;7[$

12. المجال الذي مركزه 1− وطوله 5 هو :

$[-1;5]$	$\left[-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right]$	$[-3;1]$

13. إذا كان $1 < x < 2$ و $3 < y < 4$ ، فإنّ :

$-2 < x - y < 2$	$-3 < x - y < -1$	$-2 < x - y < -1$

14. إذا كان $-3 < a < -1$ و $1 < b < 4$ ، فإنّ :

$1 < ab < 12$	$-12 < ab < -1$	$-3 < ab < -4$

15. إذا كان $x \leq -2$ فإنّ :

$2x - 1 \geq -5$	$2x - 1 \leq -5$	$2x - 1 < -5$

16. إذا كان $x = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ فإنّ :

$x^2 < x < x^3$	$x > x^2 > x^3$	$x < x^2 < x^3$

17. إذا كان $-5 \leq b \leq -1$ فإنّ :

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{1}{2}$	$2 \leq \frac{1}{b^2+1} \leq 26$	$\frac{1}{26} \leq \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{1}{2}$

18. إذا كان $A = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ و $B = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ ، فإنّ :

$\lvert A\rvert + \lvert B\rvert = 0$	$\lvert A\rvert + \lvert B\rvert = 2\sqrt{3}$	$\lvert A\rvert + \lvert B\rvert = 2\sqrt{5}$

19. العدد $\left|\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right|$ يساوي :

$\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$

20. إذا كان $\lvert x\rvert < 2$ فإنّ :

$x^2 \in]-\infty; 4[$	$x^2 \in [0; 4[$	$x^2 \in [4; +\infty[$

21. العدد $\lvert 2 \times 5 - 3\rvert - 2\lvert 3 \times 2 - 1\rvert$ يساوي :

19	-9	-5

22. إذا كان $\lvert x + 5\rvert \leq 3$ فإنّ :

$x \in [-8; -2]$	$x \in [-8; 8]$	$x \in [-3; 3]$

23. إذا كان $x \in [-3; 7]$ فإنّ :

$d(x; 3) \leq 4$	$d(x; 2) \leq 5$	$d(x; 1) \leq 6$

24. حلول المعادلة $\lvert x - 2\rvert = 3$ هي :

$S = \{-2; 3\}$	$S = \{-1; 5\}$	$S = \{0; 2\}$

25. حلول المعادلة $\lvert x - 7\rvert = \lvert x + 2\rvert$ هي :

$S = \{2; -7\}$	$S = \{-2; 7\}$	$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

26. مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق $\lvert x - 2\rvert \leq 2$ هي المجال :

$[-4;0]$	$[-2;2]$	$[0;4]$

27. مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق $\frac{1}{2} \leq \left|x-\frac{5}{2}\right|$ هي المجال :

$]2;3[$	$[2;3]$	$[-3;-2]$

28. مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\frac{3x+5}{-x+2}$ هي :

$\mathbb{R}-\{-2\}$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}$

29. مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\frac{3x+5}{\lvert x\rvert-2}$ هي :

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}-\{-2;2\}$

30. مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\sqrt{3x+6}$ هي :

$[-3;+\infty[$	$]-2;+\infty[$	$[-2;+\infty[$

31. الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+\lvert x\rvert$ هي :

لا زوجية ولا فردية	فردية	زوجية

32. f دالة معرّفة على المجال $[-5;8]$ ، وليكن جدول تغيّراتها التالي :

x	-5	-2	-1	2	8
$f(x)$	-4	0	2	1	3

أ. المنحنى (C_f) يقطع :

المحورين معًا	محور التراتيب فقط	محور الفواصل فقط

ب. إذا كان $x \in [-2;2]$ فإنّ :

$f(x) \in [1;2]$	$f(x) \in [0;2]$	$f(x) \in [0;1]$

ج. عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ هو :

3	2	1

د. العدد 0 له :

ثلاث سوابق	سابقتان	سابقة واحدة

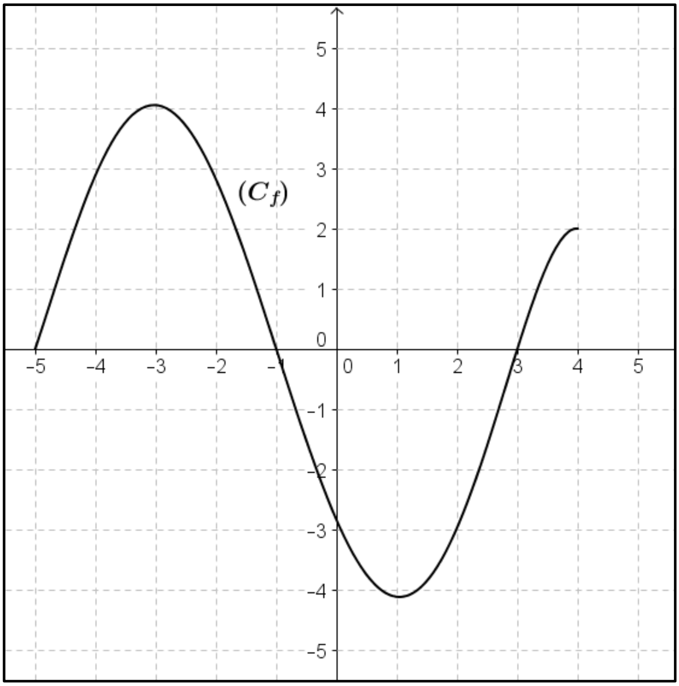
ه. حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي :

$[-2;8]$	$[0;8]$	$[0;+\infty[$

و. من أجل $x \in [-1;8]$ تكون الدالة f :

غير رتيبة	متناقصة تماما	متزايدة تماما

33. f دالة معرّفة على المجال $[-5;4]$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني التالي :



أ. الدالة f متزايدة على المجال :

$[0;4]$	$[1;4]$	$[-5;-3] \cup [1;4]$

ب. عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ هو :

1	2	3

ج. العدد 0 له :

سابقة واحدة	سابقتان	ثلاث سوابق

د. حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي :

$[-5;0[$	$]-3;1[$	$]-1;3[$

ه. تقبل الدالة f :

قيمة حدّية واحدة	قيمتين حدّيتين	ثلاث قيم حدّية

اعتبارات

الفصل

الثاني

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I-أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. مجموعة حلول المتراجحة $\frac{-x+1}{2+x} \geq 0$ هي : $S =]-2; 1[$.
2. من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \leq 1 + sinx \leq 2$.
3. $(sinx - cosx)^2 + 2sinx.cosx = -1$.
4. المعادلة $\frac{x^2-x+1}{x-2} = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.

II- اختر الجواب الصحيح مع التعليل :

1. مجموعة تعريف الدالة f حيث : $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ هي :

أ) $\mathbb{R}$ ؛ ب) $\mathbb{R}^* - \{1\}$ ؛ ج) $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.

2. قيمة العدد $\cos\left(\frac{-29\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-29\pi}{2}\right)$ هي :

أ) 1 ؛ ب) 0 ؛ ج) $\frac{1}{2}$.

التمرين الثاني :

1. عيّن قيم α حيث : $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ و $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
2. عيّن القيم المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
3. لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بالعبارة : $f(x) = -2\cos x + 3$

ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ أنشئ جدول تغيّراتها.

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

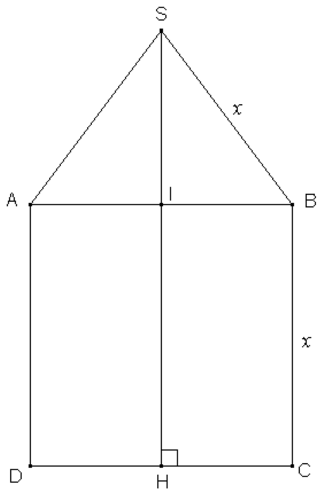
1. تحقّق أنّ $f(x) = (x-1)^2 - 4$ من أجل كل عدد حقيقي x.
2. استنتج أنّ $f(x) \geq -4$ من أجل كل عدد حقيقي x.

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 1]$ ثمّ على المجال $[1 ; +\infty[$ ، ثمّ أنشئ جدول تغيراتها.
4. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ مستنتجا نقاط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل.
5. اشرح كيف يمكن رسم $(\mathscr{C})$ انطلاقا من $(\mathscr{P})$ المنحنى البياني للدالة مربّع ثمّ أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{P})$.
6. حلّ بيانيا المتراجحة $f(x) \geq 0$.

التمرين الرابع :

x عدد حقيقي موجب تماما و ABCD مربّع ضلعه x و ABS مثلث متقايس الأضلاع (انظر الشكل).

1. نعتبر $\mathrm{A}(x)$ مساحة المضلّع SABCD.
   أ. بيّن أنّ : $SI = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.
   ب. أكتب $\mathrm{A}(x)$ بدلالة x.
2. نفرض أنّ x عدد طبيعي. ما هي أكبر قيمة لـ x تجعل الطول SH أصغر تماما من 6 ؟



الموضوع الثاني

التمرين الأول :

x عدد حقيقي. $A(x)$ و $B(x)$ عبارتان معرفتان كما يلي :

$$A(x) = \cos\frac{17\pi}{2} - \sin(x+\pi) + \cos(11\pi + x)$$

$$B(x) = \cos(-x) + \sin(7\pi - x) - \sin 3\pi$$

1. بيّن أنّ: $A(x) = \sin x - \cos x$ وَ $B(x) = \sin x + \cos x$
2. بيّن أنّ: $A(x).B(x) = 1 - 2\cos^2 x$
3. أحسب $\sin x$ و $\cos x$ علما أنّ: $A(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ وَ $B(x) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ،
   ثمّ استنتج قيم x في المجال $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

التمرين الثاني :

I-لتكن $E(x)$ عبارة جبرية للمتغير الحقيقي x حيث : $E(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $E(x) = 0$.
2. حلل العبارة الجبرية $E(x)$ إلى جداء عاملين.
3. أدرس حسب قيم المتغير الحقيقي x إشارة $E(x)$.
4. أحسب $E(x)$ من أجل $x = \sqrt{2}$ ثمّ من أجل $x = \frac{1}{3}$.

II- نضع : $F(x) = \frac{2x+4}{E(x)}$.

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $F(x) = 0$.
2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $F(x) \geq 0$.

التمرين الثالث :

لدراسة أوزان تلاميذ بإحدى الثانويات اخترنا عيّنة من 40 تلميذ فحصلنا على البيانات التالية : (الوحدة Kg)

الفئات	$]40\,;\,45]$	$]45\,;\,50]$	$]50\,;\,55]$	$]55\,;\,60]$	$]60\,;\,65]$
التكرار	a	b	$2a$	$b+3$	$2a-4$
ت م ص					

1. أحسب تكرار كل فئة إذا علمت أنّ المجمّع الصاعد للفئة]55 ; 50] يساوي 23.
2. أحسب وسيط هذه السلسلة.

التمرين الرابع :

f و g دالتان عدديتان للمتغير الحقيقي x معرّفتان كما يلي : $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ، $g(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$. $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيليهما في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

-I

1. أثبت باستعمال الشكل النموذجي أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$:
$f(x) = (x+1)^2 - 2$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
3. بيّن أنّه يمكن استنتاج المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ انطلاقا من المنحنى (P) الممثل للدالة مربّع.
4. عيّن إحداثيات نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع محور الفواصل.

-II

1. حدّد مجموعة تعريف الدالة g.
2. أحسب $g(0)$ و $g(-2)$.
3. تحقّق أنّه من أجل كل x من Dg: $g(x) = -2 + \frac{1}{x+1}$.
4. أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
5. بيّن أنّه يمكن استنتاج المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من المنحنى (H) الممثل للدالة مقلوب.

-III

1. أنشئ كلا من (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.
2. حدّد بيانيا حلول المعادلة : $f(x) = g(x)$.
3. حلّ جبريا المتراجحتين : $f(x) \leq 0$ و $g(x) \geq 0$.

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

لتكن العبارة الجبرية $E(x)$ حيث: $E(x) = x^3 - 19x + 30$.

1. أثبت أنّ : $E(x) = (x-3)(x^2+3x-10)$.
2. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2+3x-10=0$ واستنتج تحليلا للعبارة $x^2+3x-10$.
3. ادرس إشارة $E(x)$ ثمّ استنتج حلول المتراجحة $E(x) \geq 0$.

التمرين الثاني :

اكتب العبارات التالية بدلالة $\sin x$ و $\cos x$:

1. $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
2. $\sin(-x) - \sin(-x + 3\pi)$
3. $\cos(x - 5\pi) + \sin(-x + 3\pi)$.

التمرين الثالث :

إليك علامات تلاميذ قسم السنة الأولى ثانوي في اختبار مادة الرياضيات :

11	8	6	7	11
10	10	3	10	9
6	7	15	11	8
5	10	7	6	11
10	9	15	12	7

1. ما هو التكرار الكلي N.
2. أعط جدول التوزيعات التكرارية لهذه السلسلة الإحصائية مبينا فيه التكرار المجمّع الصاعد و التكرار المجمّع النازل و تواتر كل قيمة.
   أ. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة 7 على الأقل ؟
   ب. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة 11 على الأكثر ؟
3. أحسب الوسط الحسابي ، الوسيط و المنوال لهذه السلسلة.
4. مثّل هذه السلسلة بمخطط الأعمدة ثمّ أنشئ المضلع التكراري.

التمرين الرابع :

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 8x + 7$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. تحقّق أنّ $f(x) = (x-4)^2 - 9$ من أجل كل عدد حقيقي x.
2. أحسب $f(4)$ ، ثمّ بيّن أنّ للدالة f قيمة حدية صغرى عند $x = 4$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثمّ أنشئ جدول تغيراتها.
4. عيّن إحداثيات نقاط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ مع محوري الإحداثيات.
5. اشرح كيف يمكن رسم $(\mathscr{C})$ انطلاقا من $(\mathscr{P})$ المنحنى البياني للدالة مربّع ثمّ أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{P})$.

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

I- اختر الجواب الصحيح مع التعليل :

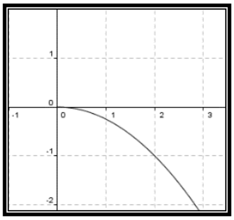
1. مجموعة تعريف الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{x-3}$ هي :

أ) $]-\infty; 3]$ ؛ ب) $[3; +\infty[$ ؛ ج) $\mathbb{R} - \{3\}$.

2. الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 2x^2 - x$ هي :

أ) فردية ؛ ب) زوجية ؛ ج) لا زوجية و لا فردية.

3. g دالة فردية معرّفة على $\mathbb{R}$ ومتناقصة على المجال $[0; +\infty[$ حيث : $g(2) = -1$



أ. g متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و $g(-2) = 1$.

ب. g متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و $g(-2) = -1$.

ج. g متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ و $g(-2) = 1$.

II- أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. من أجل كل عدد حقيقي x : $1 \leq 2 + cosx \leq 3$.
2. $\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{55\pi}{6}\right) = +1$.

III- بسّط العبارة التالية :

$E = \sin(x - 4\pi) + \cos(-x + 6\pi) + \sin(x + 3\pi) + \cos(x + 3\pi)$.

التمرين الثاني :

نعتبر العبارتين : $A(x) = (4x^2 - 1)(x + 1)$ و $B(x) = (x^2 - 1)(2x - 1)$.

1. حلّل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى $\mathrm{A}(x)$ و $\mathrm{B}(x)$.
2. نضع : $P(x) = A(x) - B(x)$.

استنتج تحليل $P(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى ، ثمّ حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$.

3. نضع : $Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

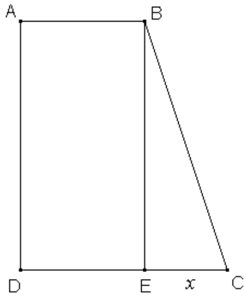
أ. عيّن مجموعة تعريف العبارة $Q(x)$.

ب. اختزل $Q(x)$.

ج. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $Q(x) \leq 0$.

التمرين الثالث :

ABCD شبه منحرف قائم. E المسقط العمودي لـ B على [DC] حيث : AB = 3 *cm* ، CE = *x cm* و AD = (2*x* + 4) *cm*.



1. أحسب بدلالة x المساحة $A(x)$ للمستطيل DABE.
2. أحسب بدلالة x المساحة $B(x)$ للمثلث EBC.
3. أوجد العدد الحقيقي a بحيث : $B(x) = (x+1)^2 + a$.
4. أدرس تغيرات الدالة B على المجال $[0\ ;\ +\infty[$.
5. تحقّق أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$.
6. أوجد قيم x بحيث تكون المساحة $B(x)$ أكبر تماما من المساحة $A(x)$.
7. عيّن المساحة $F(x)$ لشبه المنحرف ABCD.
8. تحقّق أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2 + 8x - 20 = (x-2)(x+10)$.
9. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $F(x) = 32$.

التمرين الرابع :

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس(O, I, J).نعتبر النقط A و B و C من المستوي حيث :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{I} + \vec{J} \text{ و } \overrightarrow{AB} = -4\vec{I} - 2\vec{J} \text{ و } \overrightarrow{AC}\binom{-4}{4}$$

1. علم النقط A وB و C
2. برهن ان النقط A و B و O على استقامة واحدة
3. عين احداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الاضلاع ثم عين احداثيي مركزه I
4. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C
أ. اكتب معادلة للمستقيم (Δ) ثم عين معامل توجيهه
ب. عين احداثيي E نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

5. لتكن K ، L ، M صور الأعداد $\frac{15\pi}{6}$ ، $\frac{16\pi}{3}$ و $\frac{-3\pi}{4}$ على الترتيب.
   أ. مثّل النقط K ، L ، M على الدائرة المثلثية.
   ب. أحسب إحداثيات النقط K ، L ، M.
6. عيّن العنصر (أو العناصر) x من المجال $[\pi\ ;\ 2\pi]$ في الحالتين الآتيتين :
   $\cos x = \frac{1}{2}$ ؛ $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$ نعتبر النقط A(-2 ; -2) ، B(1 ; 1) ، C(3 ; 0) و النقطة E(x ; 3) حيث x عدد حقيقي.

1. أحسب مركبتي كل من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.
2. أوجد إحداثيي I منتصف القطعة [AC].
3. أثبت أنّ النقطA ، B ، Oعلى استقامية.
4. عيّن إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.
5. عيّن قيمة العدد الحقيقي x حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CE}$ مرتبطين خطيا.

التمرين الثالث :

1) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -2(x-1)^2 + 1$.
   أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x) - f(1) \leq 0$، ثمّ استنتج أكبر قيمة ممكنة للدالة f.
   ب. عيّن صورة كل من 1- و 0 بالدالة f.
   ج. عيّن السوابق الممكنة للعدد 1- بالدالة f.

2) g دالة معرّفة على المجال $]-\infty; 3[\ \cup\ ]3; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$.
   $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$.
   أ. أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجالين $]-\infty; 3[$ و $]3; +\infty[$
   ب. شكّل جدول تغيرات الدالة g.
   ج. بيّن أنّه يمكن استنتاج المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{H})$ الممثل للدالة المرجعية مقلوب.

د. أنشئ (C_g) و (H) في المعلم السابق.

ه. حلّ بيانيا المتراجحة : $g(x) > 2$.

التمرين الرابع :

ليكن كثير الحدود $p(x)$ للمتغيرالحقيقي x حيث : $p(x) = x^3 - 8x^2 - 25x + 200$

1. بين من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x) = (x+5)(x^2 - 13x + 40)$
2. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 13x + 40 = 0$ ، ثمّ استنتج مجموعة حلول المعادلة : $p(x) = 0$
3. نعتبر العبارة $E(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث : $E(x) = x^2 - 13x + 40$
   أ. حلل العبارة $E(x)$ الى جداء عاملين
   ب. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة $E(x) \geq 0$
4. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $\frac{p(x)}{x-5} = 0$
5. مستطيل محيطه 26 و مساحته 40 . عين طول وعرض هذا المستطيل.

الموضوع السادس

التمرين الأول :

1. عيّن $\cos x$ علما أنّ $\sin x = \frac{1}{3}$ و $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. أحسب $\sin x$ علما أنّ $\cos x = \frac{4}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي xلدينا :

أ. $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

ب. $1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{cos^2 x}$، حيث: $\cos x \neq 0$.

ج. $1 + \frac{cos^2 x}{sin^2 x} = \frac{1}{sin^2 x}$، حيث: $\sin x \neq 0$.

التمرين الثاني :

ABC مثلث كيفي.

1. أنشئ النقطتين B' و C' حيث : $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. أنشئ النقطتين H و G حيث : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$.
3. بيّن أنّ النقط A ، H ، G في استقامية.

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 6x + 10$ و (C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. تحقّق أنّ $f(x) = (x-3)^2 + 1$ من أجل كل عدد حقيقي x.
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $f(x) - f(3) \geq 0$ ، ثمّ استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة f.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين]-∞; 3] و [3 ; +∞[، ثمّ أنشئ جدول تغيراتها.
4. اشرح كيف يمكن رسم (C) انطلاقا من (P) المنحنى البياني للدالة مربّع ثمّ أنشئ (C) و (P).

التمرين الرابع :

x عدد حقيقي موجب وABC مثلث حيث : $AB = x + 2$، $AC = 3x + 1$، $BC = 2x + 3$

1. بيّن أنّ المثلث ABC يكون قائما في A يكافئ : $3x^2 - x - 2 = 0$
2. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ : $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$
3. استنتج قيمة x بحيث يكون المثلث ABC قائما في A.

الموضوع السابع

التمرين الأول :

I- الجدول التالي يمثل سلسلة علامات تلاميذ قسم في مادة الرياضيات

العلامة	$\alpha-4$	$\alpha-2$	$\alpha-1$	α	$\alpha+1$	$\alpha+3$
التواتر	$0{,}1$	$0{,}12$	$0{,}15$	β	$0{,}13$	$0{,}2$

1. عيّن العددين الحقيقيين α و β علما أنّ قيمة الوسط الحسابي هي : $\bar{x}=10{,}94$
2. عيّن مدى هذه السلسلة

II- توزع العلامات في فئات كما هو مبيّن في الجدول التالي :

العلامة	$[7;11[$	$[11;13[$	$[13;16[$
عدد التلاميذ	10	11	4

1. اعط تقديرا m لوسيط هذه السلسلة
2. ارسم المدرّج التكراري لهذه السلسلة

التمرين الثاني :

1. ليكن α عددا حقيقيا حيث: $\alpha\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$. عيّن $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ إذا علمت أنّ :
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}$.
2. ليكن α عددا حقيقيا حيث: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ و $\sin\alpha=\frac{x}{5}$. عيّن قيم العدد الحقيقي x حتى يكون العدد α موجودا.
3. علّم على الدائرة المثلثية النقط A ، B ، C التي صورها على الترتيب :
$\frac{125\pi}{6}$ ، $\frac{2006\pi}{4}$ ، $\frac{-1427\pi}{3}$. أحسب جيب وجيب تمام كل واحد من هذه الأعداد.

التمرين الثالث :

ABCDEF متوازي مستطيلات حيث : $AB=2cm$ ،$AD=4cm$ ،$AE=3cm$.

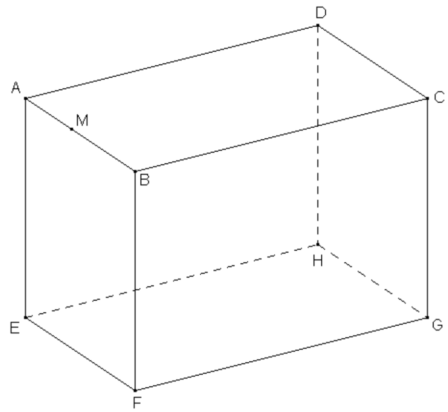
M نقطة متغيرة من [AB].

1. عيّن الوضعية النسبية للمستقيمين (FG) ، (BD) وللمستقيمين (AB) ، (CG).
2. نضع : $AM=x$ و $EM+MC=l$.

أ. عبّر عن كل من EM و CM بدلالة x.

ب. استنتج أنّ : $l=\sqrt{9+x^2}+\sqrt{16+(2-x)^2}$.

3. بيّن أنّه من أجل كل وضعية للنقطة M على [AB] ، تكون مساحة المثلث EFM ثابتة (مستقلة عن x).
4. ما هو حجم متوازي المستطيلات ABCDEF ؟



التمرين الرابع :

1. لتكن العبارة $\mathrm{A}(x)$ حيث : $A(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2$.
   - بسّط $\mathrm{A}(x)$ ثمّ حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $\mathrm{A}(x) = 0$.
   - حلّل $\mathrm{A}(x)$ ثمّ حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\mathrm{A}(x) > 0$.
2. نعتبر العبارة $\mathrm{B}(x)$حيث: $B(x) = 2x^2 + 12x + 18$.
   - حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $\mathrm{B}(x) = 0$ ، ثمّ استنتج تحليلا لـ $\mathrm{B}(x)$.
3. لتكن العبارة $\mathrm{E}(x)$ حيث: $E(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.
   - عيّن D مجموعة قيم x من $\mathbb{R}$ بحيث يكون للعبارة $\mathrm{E}(x)$ معنى.
   - بسّط $\mathrm{E}(x)$ ثمّ حلّ في D المتراجحة $\mathrm{E}(x) \leq 0$.

الموضوع الثامن

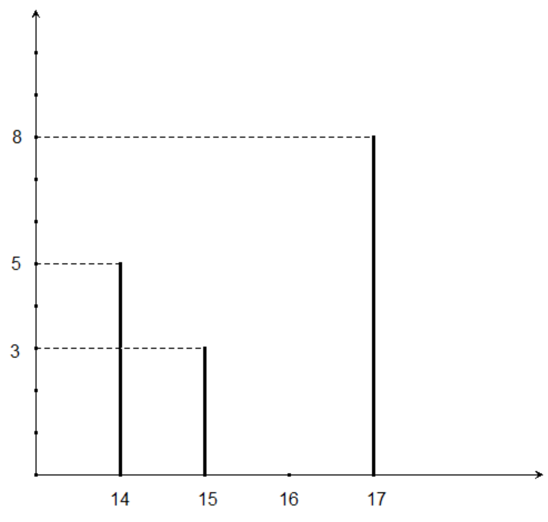
التمرين الأول :

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. لا يوجد أي عدد حقيقي xحيث: $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
2. x عدد حقيقي من المجال $[0 ; \pi]$. $\cos x \geq \frac{1}{2}$ تكافئ $x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$.
3. x عدد حقيقي. أ) $\sin(\pi - x) = \sin x$ ؛ ب) $\cos(\pi + x) = \cos x$ ؛ ج) $\sin(5\pi + x) = \sin x$.
4. a و b عنصران من $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. إذا كان $a < b$ فإنّ $\cos a < \cos b$.
5. a و b عنصران من $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. إذا كان $a < b$ فإنّ $\cos\left(\frac{1}{b}\right) < \cos\left(\frac{1}{a}\right)$.

التمرين الثاني :

المخطط التالي يمثل أعمار 22 رياضيا لنادي كرة السلة. لكن العمود الذي يمثل الرياضيين الذين أعمارهم 16 سنة تمّ مسحه من المخطط



1. أحسب عدد الرياضيين الذين أعمارهم 16 سنة.
2. ما هي النسبة المئوية للرياضيين الذين أعمارهم 15 سنة ؟
3. ما هو متوسط العمر لكل الرياضيين ؟ و ما هو العمر الوسيط ؟
4. أنقل و أكمل الجدول التالي :

الأعمار	14	15	16	17	المجموع
التكرار					
قيس الزاوية بالدرجة					180

5. أرسم مخطط نصف دائري يمثل فئات أعمار الرياضيين (نأخذ $R = 4\ cm$).

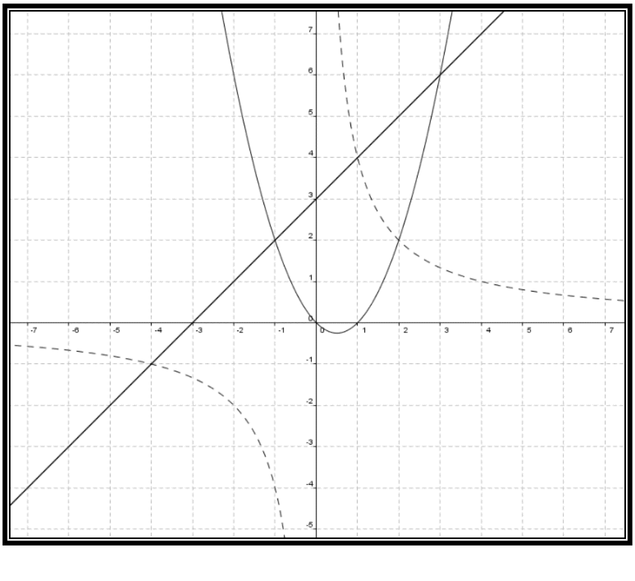
التمرين الثالث :

f و h دالتان معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - x$ و $h(x) = x + 3$ و g دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x) = \frac{4}{x}$.

1. أكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي و تحقّق أنّ : $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ، ثمّ استنتج القيمة الحدية الصغرى للدالة f.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2} ; +\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
3. في الشكل المقابل التمثيلات البيانية للدوال f ، g و h.

أ. حلّ بيانيا المتراجحتين : $\frac{4}{x} \geq x^2 - x$ و $\frac{4}{x} \leq x + 3$.

ب. استنتج مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث : $x^2 - x \leq \frac{4}{x} \leq x + 3$.



الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. عيّن على الدائرة المثلثية النقطتين M_1 و M_2 حيث M_1 صورتها $\frac{21\pi}{4}$ و M_2 صورتها $\frac{17\pi}{2}$.
2. احسب القيم المضبوطة لـ: $cos\frac{21\pi}{4}$ ، $sin\frac{21\pi}{4}$ ، $cos\frac{17\pi}{2}$ و $sin\frac{17\pi}{2}$.
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x حيث : $\sin x \neq 0$ و $\cos x \neq 0$ ، لدينا :

$$1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x} \quad \text{و} \quad 1 + \frac{1}{tan^2x} = \frac{1}{sin^2x}$$

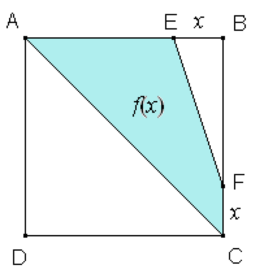
4. إذا كان $tan\ x = -2$ على المجال $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. أحسب $cos\ x$ و $sin\ x$.

التمرين الثاني :

لتكن العبارة $A(x)$ حيث : $A(x) = 4x^2 - 9 + (2x+3)(3x-4)$.

1. حلّل ، أنشر و بسّط العبارة $A(x)$.
2. أحسب $A(0)$ و $A(-1)$.
3. نضع: $E(x) = \frac{A(x)}{4x^2-9}$.
   أ. أوجد مجموعة x التي تكون من أجلها معنى لـ $E(x)$.
   ب. اختزل العبارة $E(x)$
   ج. حل المعادلتين : $E(x) = 0$ و $E(x) = 1$.
   د. حلّ المتراجحة : $E(x) \leq 0$.
4. لتكن العبارة التالية: $F(x) = x^2 + x - 6$.
   أ. أكتب العبارة F على الشكل النموذجي.
   ب. حل المعادلة : $F(x) = 0$.
   ج. حلّل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى ثمّ ادرس إشارتها.

التمرين الثالث :



ABCDمربّع طول ضلعه $4\ cm$. E نقطة من [AB] وF نقطة من [BC] حيث : $BE = CF = x$. (أنظر الشكل)

1. أحسب بدلالة x مساحة المثلث BEF.
2. نرمز بـ $f(x)$ إلى مساحة الجزء المظلل من الشكل.

أ. عيّن مجموعة قيم x التي تمسحها النقطة F.

ب. بيّن أنّ: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 8$.

ج. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 6$.

د. أدرس تغيرات الدالة f على المجالين [2 ; 0] و [4 ; 2] ، ثمّ استنتج جدول تغيراتها.

ه. أحسب صور الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 بالدالة f، ثمّ ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

3. ما هو موضع النقطتين E وF حيث تكون مساحة الشكل المظلل أصغر ما يمكن ؟
4. باستعمال السؤال (ج) عيّن قيّم x بحيث تكون $f(x) = 6\ cm$.

التمرين الرابع :

الجدول الإحصائي التالي يتعلق بأوزان 30 طفل

الأوزان(Kg)	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	$[20;25[$
التكرارات	5	x^2	$2x$	$x+7$

1. عيّن x
2. نضع : $x = 3$

أ. اكمل الجدول السابق مبينا فيه مراكز الفئات، التكرار المجمّع الصاعد والتكرار المجمّع النازل

ب. احسب الوسط الحسابي

ج. استنتج الفئة المنوالية والفئة الوسيطية

د. مثّل معطيات السلسلة بالمدرج التكراري والمضلع التكراري.

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

اختر الإجابة الصحيحة في كل حالة مما يلي :

1. المنحنى الممثّل للدالة مربّع متناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته :

أ) $x = 0$ ؛ ب) $y = 0$ ؛ ج) $y = x$.

2. الدالة مقلوب معرّفة على :

أ) $\mathbb{R}$ ؛ ب) $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ ؛ ج) $]0 ; +\infty[$.

3. المنحنى الممثّل للدالة مقلوب متناظر بالنسبة إلى النقطة :

أ) $O(0 ; 0)$ ؛ ب) $A(1 ; 0)$ ؛ ج) $B(0 ; 1)$.

4. f دالة معرّفة على المجال $I =]-4 ; 4[$. نقول أن الدالة f فردية إذا تحقّق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I:

أ) $f(x) + f(-x) = 0$ ؛ ب) $f(x) - f(-x) = 0$ ؛ ج) $f(x) + f(-x) \neq 0$.

التمرين الثاني :

عند دراسة إحصائية لعدد ساعات استعمال الانترنت لـ 35 تلميذ في العطلة ، حصلنا على النتائج التالية :

عدد الساعات	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
التكرارات	3	11	7	10	4
مراكز الفئات					
التكرارات المجمّعة الصاعدة					

1. أكمل الجدول السابق.
2. أنشئ مضلّع التكرارات المجمعة الصاعدة ثمّ استنتج بيانيا قيمة الوسيط.
3. أحسب الوسط الحسابي و الوسيط.
4. ما هي النسبة المئوية للتلاميذ الذين يستعملون الانترنت أقل من 6 ساعات ؟

التمرين الثالث :

1. بسّط العبارتين التاليتين :

أ. $\cos(x+\pi) - 2\sin(x-\pi) + 2\cos(x-\pi) + \sin(x+\pi)$

ب. $3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)$

2. أثبت صحة المساويات التالية :

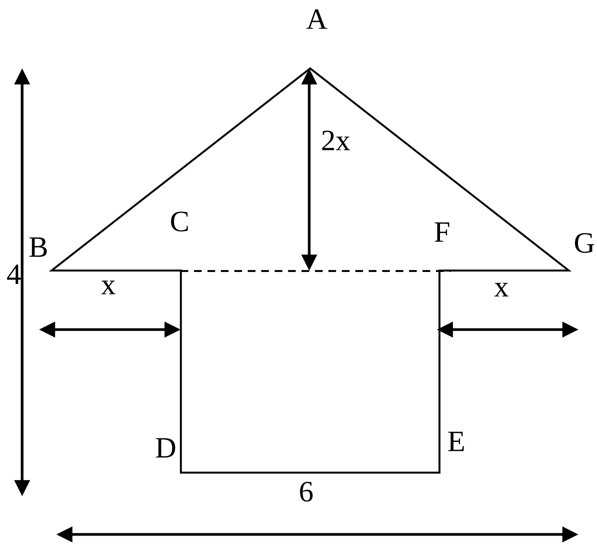
أ. $2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

ب. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

ج. $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$

التمرين الرابع :

باستعمال المعطيات الموجودة في الشكل المقابل :



1. عيّن القيم الممكنة لـ x.
2. عبّر بدلالة x عن :
   - أ. الطول CD و الطول CF.
   - ب. مساحة المستطيل CDEF.
   - ج. مساحة المثلث ABG.
3. أثبت أنّ مساحة الشكل المعطى هي :$f(x) = 4x^2 - 14x + 24$.
4. أكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي.
5. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0 ; 2]$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
6. استنتج مما سبق قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل المعطى أصغر ما يمكن.
7. عيّن قيم x حتى تكون :
   - أ. $f(x) = 14\ cm^2$.
   - ب. $f(x) \le 12\ cm^2$.

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

ABC مثلث كيفي من المستوي.

النقط R ، S و T معرّفة كما يلي: $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

1. استعن بشكل توضيحي.
2. بيّن أنّ: $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.
3. عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{RT}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
4. تحقق أنّ: $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. ماذا تستنتج؟

التمرين الثاني :

الجدول التالي يمثل علامات 150 تلميذ في مادة الرياضيات في مسابقة.

الفئات	$[0;2,5[$	$[2,5;5[$	$[5;7,5[$	$[7,5;10[$	$[10;12,5[$	$[12,5;15[$	$[15;17,5[$	$[17,5;20[$
التكرار								
ت.م.ص	6	24	39	66	99	126	147	150
التواتر								

1. أكمل الجدول.
2. احسب العلامة الوسيطية Med.
3. أنشئ المدرج التكراري لهذا التوزيع.
4. إذا علمت أنّ 50% من المشاركين نجحوا في المسابقة وأنّ كل الناجحين لا تقل علاماتهم عن 10 نقاط في مادة الرياضيات. ما هو عدد الطلبة الذين تحصلوا على علامة أكبر من أو تساوي 10 في مادة الرياضيات ولم ينجحوا ؟

التمرين الثالث :

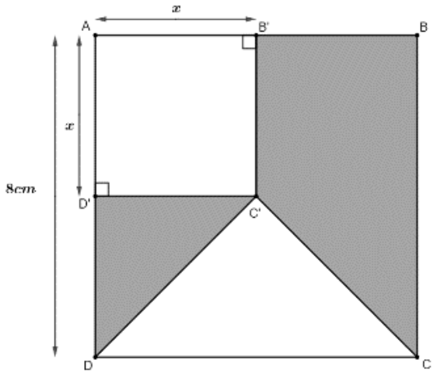
نعتبر العبارة الجبرية $P(x)$ المعرّفة بـ: $P(x) = x^2 - 4x + 4 - (2x-4)(x+1)$

1. حلل $P(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $-x^2 - 2x + 8 = 0$، ثمّ استنتج حلول المعادلة

$$-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(1-\frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

التمرين الرابع :

$ABCD$ مربّع حيث: $AB = 8cm$. B' و D' نقطتان من $[AB]$ و $[AD]$ على الترتيب حيث:
$AB' = AD' = x$ مع $0 \leq x \leq 8$. نسمي $g(x)$ مساحة الجزء المظلل.



1. بيّن أنّ مساحة الجزء المظلل تُعطى بالعبارة التالية: $g(x) = -x^2 + 4x + 32$.
2. عيّن قيم العدد الحقيقي x التي من أجلها تكون مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة الجزء غير المظلل.
3. عيّن قيم العدد الحقيقي x التي من أجلها تكون مساحة الجزء المظلل أصغر أو تساوي $32cm^2$.
4. أ. تحقق أنّه من أجل كل x من المجال $[0; 8]$: $g(x) = -(x-2)^2 + 36$.
   ب. حلل العبارة إلى جداء عاملين.
   ج. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على كل من المجالين $[0; 2]$ و $[2; 8]$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
5. استنتج مما سبق قيمة العدد الحقيقي x حتى تكون مساحة الجزء المظلل أكبر ما يمكن. حدد هذه المساحة.

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

1. حوّل إلى الراديان قيس الزاوية $36°$ ، ثمّ حوّل إلى الدرجات القيس $\frac{2\pi}{5}rad$.
2. مثّل على الدائرة المثلثية النقط A ، B و C صور الأعداد $\frac{\pi}{5}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{2019\pi}{5}$.
3. إذا علمت أنّ: $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$، بيّن أنّ: $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
4. برهن أنّ: $\tan\frac{\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

التمرين الثاني :

الجدول الآتي يلخص حجم المياه المخزنة في أحواض جمع مياه الأمطار لغرض سقي أراضي فلاحية (الوحدة m^3).

أحجام المياه	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$	$[80;90[$	$[90;100[$
عدد الأحواض	3	7	10	8	2

1. أعد رسم الجدول مبرزا فيه مراكز الفئات والتكرار المجمع الصاعد.
2. احسب وسيط هذه السلسلة (Med) ، الربعي الأول (Q_1) والربعي الثالث (Q_3).
3. مثل هذه السلسلة بمخطط العلبة.
4. احسب متوسط حجم المياه المخزنة.
5. نتيجة سقوط الأمطار ازداد حجم كل حوض بنسبة 30%. ما هو متوسط حجم المياه في هذه الحالة ؟

التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط: $A(-1;0)$ ، $B(-3;3)$ و $D(0;3)$.

1. علم النقط A ، B و D.
2. عين احداثيي النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.
3. لتكن النقطتان F و H حيث F منتصف القطعة $[AB]$ و $3\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD}$.
   أ. بيّن أنّ النقط F ، H و C في استقامية.
   ب. ماذا تمثل النقطة H بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

4. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل A ويوازي (BC).

أ. عين معامل توجيه للمستقيم (Δ) ثمّ اكتب معادلة له.

ب. تحقق أنّ $y = -6x - 15$ هي معادلة للمستقيم (Δ') الذي يشمل B ويوازي (AC).

ج. حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة: $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x + y = -15 \end{cases}$. فسّر النتيجة هندسيا.

5. ليكن (d_m) المستقيم ذو المعادلة $y = (m+1)x - m + 1$ حيث m وسيط حقيقي.

أ. أثبت أنّ كل المستقيمات تمرّ من نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب. عيّن قيمة m حتى يشمل المستقيم (d_m) النقطة $I(-1; 3)$.

ج. عيّن قيمة m حتى يوازي المستقيم (d_m) المستقيم (Δ').

د. عيّن قيمة m حتى يعامد المستقيم (d_m) المستقيم (Δ'') ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

التمرين الرابع :

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ: $f(x) = \frac{-x-1}{x+2}$ ولتكن الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + 1$، وليكن (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانيين لـ f و g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. عيّن قيمتي العددين a و b حيث: $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$.

2. نضع: $a = -1$ و $b = 1$

أ. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على كل من المجالين $]-\infty; -2[$ و $]-2; +\infty[$.

ب. شكل جدول تغيّرات الدالة f.

ج. جد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

د. بيّن أنّه يمكن استنتاج (C_f) انطلاقا من منحنى الدالة مقلوب ثمّ أنشئ (C_f).

3. بيانيا:

- إذا كان $-1 \leq x \leq 0$ ، أعط حصرا لـ $f(x)$.
- إذا كان $-1 < f(x) < 0$ ، أعط حصرا لـ x.

4. مثّل في المعلم السابق المنحنى (C_g).

5. حل بيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$ ، ثمّ حل المتراجحة $f(x) < g(x)$.

6. لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ: $h(x) = |f(x)|$

أ. اكتب عبارة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب. اشرح كيف يمكن استنتاج (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ أنشئ (C_h).

سلسلة 1	أولمبياد الرياضيات	

تمرين 1 : نعتبر العددين A و B بحيث :

$$A=\left(\sqrt{11}+\sqrt{12}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{12}-\sqrt{13}\right)$$
$$B=\left(\sqrt{11}-\sqrt{12}+\sqrt{13}\right)\left(-\sqrt{11}+\sqrt{12}+\sqrt{13}\right)$$

بين أن $A-B=20$ و $AB=428$

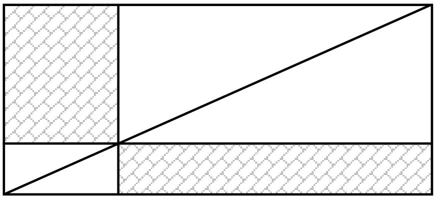
تمرين 2 : x و y و z أعداد حقيقية حيث :

x و y متناسبان على التوالي مع : 12 و 14

y و z متناسبان على التوالي مع : 21 و 24

احسب x و y و z علما أن : $x+y+z=42$

تمرين 3 : قارن مساحة المستطيلين المخدشين في الشكل أسفله :



تمرين 4 :

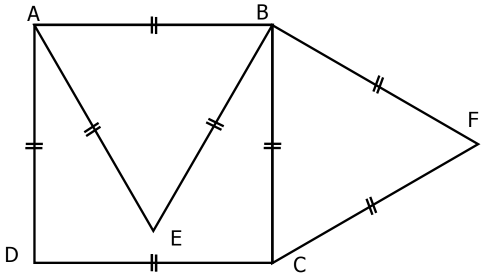
في الشكل جانبه :

$ABCD$ مربع

ABE مثلث متساوي الأضلاع

BCF مثلث متساوي الأضلاع

برهن أن النقط D و E و F مستقيمية.



تمرين 5 : x عدد حقيقي موجب. علما أن : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=10$ احسب : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

تمرين 6 : اجعل مقام العدد التالي : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ عددا صحيحا.

تمرين 7 : احسب المجموع : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

تمرين 8 :

بين أن متوسط مثلث يقسمه إلى مثلثين متساويي المساحة

استنتج أنه إذا كان ABC مثلثا مركز ثقله G فإن المثلثات GAB و GAC و GBC لها نفس المساحة

تمرين 9 :

ABE مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $5cm$

- احسب مساحته
- M نقطة داخل المثلث، I و J و K هي على التوالي المساقط العمودية للنقطة M على المستقيمات (AB) و (AC) و (BC).

احسب المجموع : $MI+MJ+MK$

الاعتبارات
الفصل الثالث

الموضوع الأول

التمرين الأول :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $A(1 ; 2)$ ، $B(-1 ; 3)$ ، $C(2 ; -3)$.

1. أثبت أنّ النقط A،B ، C ليست على استقامية.
2. عيّن إحداثيي النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع.
3. عيّن نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ABCD.
4. E نقطة ترتيبها $y = -1$. أحسب فاصلتها x بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CE) متوازيين.
5. أحسب الأطوال AD، AE ، DE ، ثمّ استنتج نوع المثلث ADE.
6. أكتب ما يلي :
   أ. معادلة للمستقيم (BC).
   ب. معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه 1.
   ج. عيّن نقطة تقاطع المستقيمين (BC) و (Δ).

التمرين الثاني :

بعد تصحيح أوراق الاختبار لقسم 1 ج م ع ت ، قام أستاذ مادة الرياضيات بتبويب العلامات في الجدول التالي :

العلامات	5	8	9	10	12	14	16	18
التكرار	3	4	6	9	5	6	2	4

1. ما هو عدد تلاميذ القسم ؟
2. شكّل جدولا مبينا فيه التواترات والتكرارات المجمعة الصاعدة
3. ما هي النسبة المئوية للتلاميذ الذين تحصلوا على المعدل ؟
4. احسب معدل القسم
5. عيّن العلامة المنوالية والعلامة الوسيطية لهذه السلسلة
6. إذا أضاف الأستاذ 1,5 نقطة لكل علامة ، فما هو المعدل الجديد للقسم ؟

التمرين الثالث :

OBC مثلث كيفي و A ، I ، P ثلاث نقط حيث : $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ ، $4\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ و I منتصف القطعة [BC].

1. أنشئ النقطA ، I ، P.
2. بيّن أنّ: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$.
3. برهن أنّ: $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$.
4. برهن أنّ: $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ و استنتج أنّ: $\overrightarrow{OP} = \frac{6}{7}\overrightarrow{OI}$.
5. ماذا تستنتج بالنسبة للنقط O ، I ، P ؟ علّل.

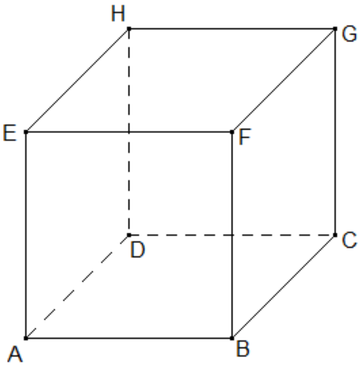
التمرين الرابع :

حل في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ الجمل التالية ذات المجهولين x و y :

$$(1) \dots \begin{cases} -2x + 7y = 18 \\ 11x + 4y = 71 \end{cases} \qquad (2) \dots \begin{cases} -2\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = 18 \\ 11\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 71 \end{cases}$$

$$(3) \dots \begin{cases} -2x^2 + 7y^2 = 18 \\ 11x^2 + 4y^2 = 71 \end{cases} \qquad (4) \dots \begin{cases} -\frac{2}{2x+1} + \frac{7}{3-y} = 18 \\ \frac{11}{2x+1} + \frac{8}{6-2y} = 71 \end{cases}$$

الموضوع الثاني

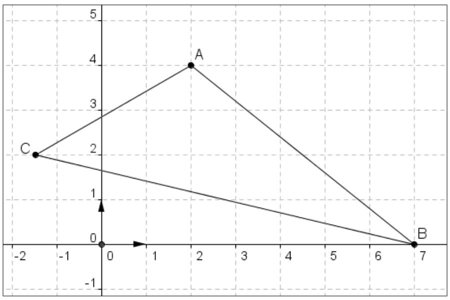


التمرين الأول :

ABCDEFGH مكعب.

1. أذكر المستقيمات :
   - أ. الموازية للمستقيم (AB).
   - ب. العمودية على المستقيم (AB).
   - ج. التي تقطع (AB).
   - د. العمودية على المستوي (ABCD).
   - ه. التي تقطع المستوي (ABCD).
2. I منتصف [EF] و J منتصف [FG]. بيّن أنّ المستقيمين (IJ) و (DF) ليسا من نفس المستوي.

التمرين الثاني :



المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O , \vec{i} , \vec{j})$.

1. باستعمال الشكل المقابل ، عيّن إحداثيات النقط A ، B ، C.
2. I و J منتصفا [AB] و [BC] على الترتيب.
   - أ. أوجد معادلتي المستقيمين (AJ) و (CI).
   - ب. أحسب إحداثيي E نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (CI). ماذا تمثّل هذه النقطة بالنسبة للمثلث ABC ؟
   - ج. أثبت أنّ: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

التمرين الثالث :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j})$. نعتبر النقط A(-4 ; 3)، B(-1 ; 0)، C(1 ; 2).

1. علّم النقط A ، B ، C.
2. أحسب أطوال أضلاع المثلث ABC.
3. أثبت أنّ المثلث ABC قائم في B.
4. أحسب $\cos\hat{A}$ و استنتج قيمة مقرّبة للزاوية $\hat{A}$.
5. أحسب مساحة المثلث ABC.
6. A′B′C′ صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$.
   أ. أنشئ A′B′C′ مع التعليل.
   ب. قارن مساحتي المثلثين A′B′C′ و ABC.
7. أنشئ صورة المستقيم (BC) بالدوران R الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

التمرين الرابع :

الجدول التالي يمثل الأوزان بالكيلوغرام لمجموعة من التلاميذ تتراوح أعمارهم بين 15 و 19 سنة :

الوزن	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$
عدد التلاميذ	30	77	42	32

1. ما هي الفئة المنوالية لهذه السلسلة ؟
2. احسب معدل الأوزان
3. احسب الوزن الوسيطي
4. احسب النسبة المئوية للتلاميذ الذين تبلغ أوزانهم 60 كغ على الأقل
5. إذا كان الوزن المتوسط للبنات 52 كغ وعددهن 96 ، احسب الوزن المتوسط للذكور.

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$. (Δ) مستقيم يشمل النقطة A(4 ; -1) و يوازي الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$. (Δ') مستقيم معيّن بالنقطتين B(2 ; 5) و C(-2 ; 1).

1. جد معادلة كل من المستقيم (Δ) و (Δ').
2. أدرس وضعية المستقيمين (Δ) و (Δ').
3. بيّن أنّ المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بدوران R يُطلب تحديد مركزه ω وزاويته θ.
4. هل النقطة B صورة النقطة A بهذا الدوران ؟

التمرين الثاني :

ABC مثلث قائم في A حيث : $\hat{B} = 22{,}5°$ و BC = 2x ، حيث x عدد حقيقي موجب تماما.
لتكن O منتصف [BC] و H المسقط العمودي للنقطة A على [BC].

1. أحسب قيسا للزاوية $A\hat{O}H$.
2. عبّر عن AH و OH بدلالة x.
3. استنتج طول الضلع AB بدلالة x.
4. باستعمال أضلاع المثلث ABH ، أحسب القيم المضبوطة لـ cos 22,5° و sin 22,5°.

التمرين الثالث :

ABC مثلث حيث: AB = 10 cm ، $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$، $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$. لتكن M نقطة متحركة على القطعة [AB] ، H المسقط العمودي للنقطة M على [AC] و K المسقط العمودي للنقطة M على [BC].

I- نضع : AM = x ؛ $x \in [0 ; 10]$.

1. أنجز شكلا مناسبا.
2. عبّر عن MH بدلالة x.
3. عبّر عن MK بدلالة x.
4. ما هي قيمة x التي تكون من أجلها المسافتان MH وMK متساويتان.

II- نعتبر F(x) مجموع مساحتي المثلثين MAH و MBK.

1. عبّر عن A(x) مساحة المثلث MAH بدلالة x و عن B(x) مساحة المثلث MBK بدلالة x.
2. استنتج أنّ: $F(x) = \frac{x^2(\sqrt{3}+2)}{8} - 5x + 25$.
3. نضع: $\alpha = 20(2-\sqrt{3})$. أحسب $F(\alpha)$.
4. بيّن أنّ: $F(x) - F(\alpha) = k(x-\alpha)^2$، حيث k عدد حقيقي يُطلب تعيينه.
5. استنتج وضعية النقطة M بحيث تكون F(x) أصغر ما يمكن.

التمرين الرابع :

في المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط $A(-2;-2)$، $B(2;0)$، $C(0;4)$ و $D(-4;2)$

1. احسب الأطوال AB ، AD و BD ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABD
2. اثبت أنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ، ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$
3. ما هي طبيعة المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ ؟ علل
4. حل في $\mathbb{R}$ الجملة : $\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$ ، ثمّ استنتج إحداثيات النقطة C في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
5. بيّن أنّ $-x + 2y + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB). هل النقطة $F(-4;-3)$ تنتمي إلى (AB) ؟

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

ABCD مستطيل مركزه O ، (Δ) مستقيم عمودي على المستوي (ABCD) في O ، S نقطة من (Δ) حيث : AB = 6 cm ، AD = 4 cm و OS = 5 cm.

1. أنشئ شكلا مناسبا.
2. أحسب المسافات SA ، SB ، SC ، SD.
3. أحسب حجم الهرم $SABCD$.
4. أحسب المساحة الجانبية للهرم $SABCD$.
5. عيّن قيسا للزاوية $B\widehat{D}S$.

التمرين الثاني :

ABC مثلث كيفي. I منتصف $[AB]$ و L نقطة حيث : $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

بيّن صحّة أو خطأ ما يلي :

1. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ معلم للمستوي
2. إحداثيات كل من B ، C ، I ، L في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ هي $B(1;0)$ ، $C(0;1)$ ، $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ، $L\left(0;\frac{3}{4}\right)$
3. المستقيمان (IL) و (BC) متوازيان
4. ليكن (d_k) المستقيم ذو المعادلة : $kx + y = 1$ (k عدد حقيقي). الجملة : $\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ kx + y = 1 \end{cases}$ تقبل مالا نهاية من الحلول من أجل $k = -\frac{3}{2}$.

التمرين الثالث :

ABC مثلث قائم في A حيث AB = 3 وAC = 4. لتكن M نقطة من [BC] حيث MC = x.
H المسقط العمودي للنقطة M على [AB] و H′ المسقط العمودي للنقطة M على [AC].

1. أرسم الشكل.
2. أحسب BC.
3. إلى أي مجال ينتمي x ؟
4. بيّن أنّ الرباعي HAH′M مستطيل.
5. بيّن أنّ $H'M = \frac{3}{5}x$ و $HM = 4 - \frac{4}{5}x$.

6. أحسب $P(x)$ محيط المستطيل HAH′M.
7. حدّد نوع الدالة P و اتجاه تغيراتها.
8. أحسب $S(x)$ مساحة المستطيل HAH′M.

التمرين الرابع :

لتكن (C) دائرة مركزها O و ABC مثلث مرسوم على الدائرة (C) .(Δ) المستقيم العمودي على (AB) و المرسوم من A يقطع الدائرة (C) في النقطة D. M نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

1. انشئ شكلا مناسبا
2. برهن أنّ $[BD]$ هو قطر للدائرة (C) ثم استنتج أنّ المستقيمين (CD) و (BC) متعامدان
3. برهن أنّ $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ وأنّ $\widehat{DCA} = \widehat{ABD}$
4. برهن أنّ المثلثين MDC و ABM متشابهين
5. استنتج أنّ $AM \times MC = BM \times MD$

الموضوع الخامس

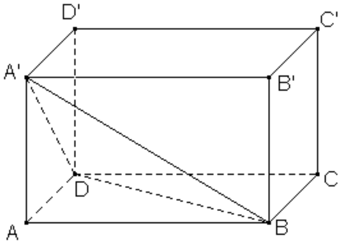
التمرين الأول :

إليك الجدول الآتي :

الفئات	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[
التكرارات	5	10	20	40	30	15

1. أنقل الجدول مبينا فيه مراكز الفئات و التكرار المجمّع الصاعد و التكرار المجمّع النازل.
2. عيّن الفئة المنوالية.
3. أحسب الوسط الحسابي ،الوسيط و المدى.
4. أنشئ المدرّج التكراري ثمّ استنتج المضلّع التكراري.

التمرين الثاني :



$ABCDA'B'C'D'$ مكعّب حرفه a.

1. أثبت أنّ المثلث BDA'متقايس الأضلاع.
2. عبّر عن مساحة المثلث BDA' بدلالة a.
3. أحسب حجم الهرم $ABDA'$ بدلالةaحيث قاعدته ABD.
4. استنتج بعد النقطة Aعن المستوي (BDA').

التمرين الثالث :

I- $ABCD$ مربع طول ضلعه 8 cm. النقط L ، M ، N ، P تنتمي على الترتيب إلى [AB] ، [BC] ، [CD] ، [AD] حيث : $AL = BM = CN = DP = 2x$.

1. إلى أي مجال ينتمي المتغير x.
2. أحسب مساحة المثلث ALP.
3. أحسب طول الضلع PL.
4. أحسب بطريقتين مختلفتين مساحة المربّع $LMNP$.

II- نسمي $A(x)$ مساحة المربّع $LMNP$ و لتكن الدالة f حيث :

$f(x) = 8x^2 - 32x + 64$.

1. أكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي.
2. استنتج أصغر قيمة للمساحة $A(x)$.

3. شكّل جدول تغيرات الدالة f. هل الدالة f رتيبة ؟
4. املأ الجدول التالي :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									

5. أنشئ البيان (C_f) للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 8cm$.
6. أكتب معادلة المستقيم (E) محور تناظر البيان (C_f).
7. حل بيانيا المتراجحات التالية : $f(x) \leq 40$ ، $f(x) < 32$ ، $f(x) \geq 64$.

التمرين الرابع :

$(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي. نعتبر النقط $A(5;0)$ ، $B(5;5)$ و $C(0;5)$ (أنشئ شكلا على أن يتم استكماله خلال التمرين).

1. جد إحداثيات النقط A' ، B' ، C' و I منتصفات $[BC]$ ، $[CO]$ ، $[OA]$ و $[AB]$ على الترتيب ، ثمّ علّم هذه النقط
2. اكتب معادلات ديكارتية لكل من المستقيمات (AA') ، (BB') ، (CC') و (OI)
3. استنتج إحداثيي النقطة R تقاطع (AA') و (BB') و إحداثيي النقطة P تقاطع (CC') و (OI) ، ثمّ تحقق أنّ (AA') و (OI) يتقاطعان في النقطة $Q(4;2)$ وأنّ (BB') و (CC') يتقاطعان في النقطة $S(1;3)$. علّم هذه النقط
4. أثبت أنّ المستقيمين (PQ) و (RS) متوازيان وأنّ المستقيمين (PS) و (QR) متوازيان
5. أثبت أنّ $PQ = PS$ وأنّ المستقيمين (PQ) و (PS) متعامدان (يمكن استعمال مبرهنة فيثاغورث)
6. استنتج طبيعة الرباعي $PQRS$.

الموضوع السادس

التمرين الأول :

لتكن العبارة $A(x)$ حيث : $A(x) = (2x-3)^2 - 4$.

1. تحقّق أنّ :
   أ. $A(x) = 4x^2 - 12x + 5$.
   ب. $A(x) = (2x-5)(2x-1)$.
2. باستعمال الصيغة الأنسب للعبارة $A(x)$:
   أ. أحسب : $A(0)$ ، $A\left(\frac{3}{2}\right)$ ، $A\left(\frac{1}{2}\right)$.
   ب. حلّ المعادلات : $A(x) = 0$ ، $A(x) = 5$ ، $A(x) = 21$.

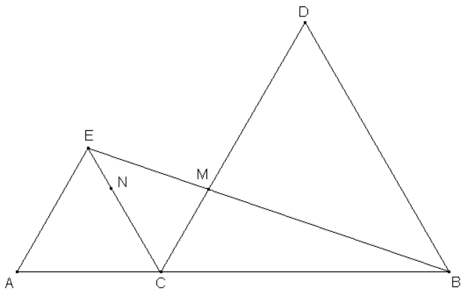
التمرين الثاني :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. m عدد حقيقي. A ، B ، C ، D أربع نقط حيث : A(1 ; 2) ، B(3 ; 0) ، C(-1 ; 1) ، D(2m-1 ; -1).

1. عيّن مجموعة قيم m بحيث :
   أ. النقط A، B ، D على استقامة واحدة.
   ب. $-3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
2. أوجد إحداثيتي النقطة A في المعلم $(B, \vec{i}, \vec{j})$.
3. بيّن أنّ الثلاثية $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ معلم للمستوي.
4. E نقطة إحداثياتها (1 ; -1) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. جد إحداثياتها في المعلم $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

التمرين الثالث : (الأجزاء الثلاثة مستقلة عن بعضها)

I- [AB] قطعة مستقيم ، C نقطة من [AB] حيث أنّ المثلثين ACE و BDC متقايسا الأضلاع. القطعتان [EB] و [CD] تتقاطعان في النقطة M. N نقطة من [CE] حيث : CN = CM. (أنظر الشكل)



1. بيّن أنّه يوجد دوران يحوّل النقط B ، M ، E إلى النقط D ، N ، A على

الترتيب ، يُطلب تعيين مركزه و زاويته.

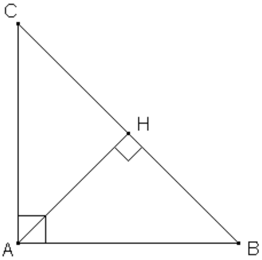
2. استنتج أن النقط A ، N ، D في استقامية.

II- A و B نقطتان ثابتتان و متمايزتان.

علّم نقطة M ثمّ أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة النقطة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

1. عبّر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.
2. استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.



III- ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين. H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

1. برهن أنّ المثلثينABC و HBA متشابهان.
2. عيّن نسبة التشابه الذي يحوّل المثلث ABC إلى المثلث HAB.
3. أحسب النسبة $\frac{S(HBA)}{S(ABC)}$ حيث S(HBA) هي مساحة المثلث HBA و S(ABC) هي مساحة المثلث ABC.

التمرين الرابع :

ABC مثلث قائم في B حيث : $\widehat{ACB} = 20°$ و $AC = 6cm$

1. أنشئ A' و C' صورتي A و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه B وزاويته $90°$ في الاتجاه الموجب
2. ما نوع المثلث $A'BC'$ ؟ علل
3. أنشئ O و O' مركزي الدائرتين المحيطتين بالمثلث ABC و $A'BC'$ على الترتيب
4. احسب الطول OO'.

الموضوع السابع

التمرين الأول :

القيم الآتية تمثّل عدد الإخوة لـ 39 شخصا :

9 – 8 – 6 – 7 – 5 – 8 – 3 – 4 – 8 – 7 – 4 – 7 – 5 – 5 – 4 – 7 – 6 – 5 – 4 – 7
– 9 – 6 – 5 – 4 – 6 – 5 – 7 – 5 – 8 – 4 – 5 – 6 – 8 – 5 – 7 – 4 – 7 – 8 – 4.

1. رتّب هذه القيم تصاعديا.
2. ضع جدولا إحصائيا لهذه السلسلة مبيّنا التكرار ، التكرار المجمّع الصاعد ، التكرار المجمّع النازل و التواتر.
3. أحسب المتوسط الحسابي ، الوسيط و المنوال لهذه السلسلة.

التمرين الثاني:

المستوي مزوّد بمعلم متعامد ومتجانس $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$. نعتبر النقط $A(2;6)$،$B(-4;-2)$،$C(6;3)$

1. تحقّق أنّ النقط A ، B ، C ليست في استقامية.
2. ما نوع المثلث ABC؟
3. عيّن إحداثيي H مركز الدائرة (S) المحيطة بالمثلث ABC واحسب طول نصف قطرها.
4. تحقّق أنّ النقطة K(2 ; -5) تنتمي إلى الدائرة (S).
5. عيّن إحداثيي النقطة D منتصف القطعة [AB].
6. أكتب معادلة المستقيم (Δ) محور القطعة [AB].
7. عيّن إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (BC).

التمرين الثالث : (الجزءان I و II مستقلان)

I- A ، B ، C ثلاث نقط ليست في استقامية.

1. أنشئ النقطة D علما أنّ : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
2. أنشئ النقط I ، B′ ، C′ حيث :

$$\overrightarrow{AB'} = 3\overrightarrow{AB}\ ،\ \overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AC}\ ،\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}.$$

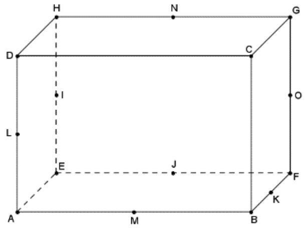
3. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AI}$، ثمّ استنتج أن النقط A ، I ، D في استقامية.

II- المستوي مزوّد بمعلم متعامد و متجانس$(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$. نعتبر النقط A(-5 ; 6) ، B(0 ; -3) ، C(7 ; -1) ، D(-5 ; -5).

1. أحسب إحداثيي النقطة E المعرّفة بـ : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$.
2. أحسب إحداثيي النقطة F بحيث يكون الرباعي ABCF متوازي أضلاع.
3. أحسب إحداثيي النقطة G المعرّفة بـ : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GD}$.

4. نعتبر النقطة $M(5\,;\,y)$. أحسب قيمة y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا ثمّ علّم النقطة M.

التمرين الرابع :



اختر الإجابة (أو الإجابات) الصحيحة :

1. النقط A ، B ، C :
أ) في استقامية ب) من نفس المستوي ج) لا تنتمي لنفس المستوي
2. النقط I ، J ، K :
أ) في استقامية ب) من نفس المستوي ج) لا تنتمي لنفس المستوي
3. النقطة A تنتمي إلى المستوي :
أ) (EFB) ب) (MJK) ج) (CGN)
4. المستقيمان (HE) و (FG) :
أ) متوازيان ب) من نفس المستوي ج) ليسا من نفس المستوي
5. المستقيمان (LM) و (IJ) :
أ) متوازيان ب) متقاطعان ج) ليسا لنفس المستوي
6. المستقيمان (DL) و (DA) :
أ) متوازيان ب) متطابقان ج) من نفس المستوي
7. المستقيمان (LM) و (IN) :
أ) متوازيان ب) متقاطعان ج) ليسا لنفس المستوي
8. المستقيم (EK) مُحتوى في المستوي :
أ) (AJK) ب) (INC) ج) (EKC)
9. المستويان (LIH) و (KGC) :
أ) متوازيان ب) متطابقان ج) متقاطعان
10. المستوي (JKO) يوازي المستوي :
أ) (BGE) ب) (BCE) ج) (EMJ)
11. المستوي (NGO) :
أ) يوازي المستوي (HGF) ب) يعامد المستوي (AEF) ج) يقطع المستوي (DCN)
12. المستويان (EIJ) و (DHC) يتقاطعان وفق المستقيم :
أ) (HI) ب) (HG) ج) (HD)

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

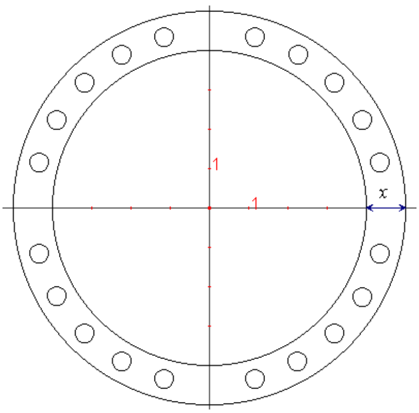
إليك نتائج تلميذ من قسم السنة الأولى علوم و تكنولوجيا للفصل الثالث :

المادة	اللغة العربية	اللغة الفرنسية	اللغة الانجليزية	تاريخ وجغرافيا	العلوم الإسلامية	العلوم الفيزيائية	العلوم الطبيعية	الرياضيات	التربية البدنية
المعامل	3	2	2	2	2	5	5	5	1
العلامة	x	10	12	14	13	9	12	y	16

1. إذا كانت علامته في الرياضيات هي 07,50 ، فما هي العلامة التي يجب أن يتحصّل عليها في مادة اللغة العربية بحيث يصبح معدّله النهائي 11 ؟
2. عيّن باستعمال تمثيل بياني أو دالة ، كل الأزواج $(x\,;y)$ الصحيحة الممكنة لعلامتي اللغة العربية والرياضيات بحيث يصبح معدّله النهائي 10.

التمرين الثاني :

$\mathrm{A}(x)$ عبارة جبرية حيث: $A(x)=(x-3)^2-\frac{9}{4}$.



1. أنشر ثم بسط العبارة $\mathrm{A}(x)$.
2. استنتج تحليلا للعبارة : $x^2-6x+\frac{27}{4}$.
3. حلّ المتراجحة : $x^2-6x+\frac{27}{4}\geq 0$.
4. في حديقة للتسلية توجد مساحة خضراء شكلها دائري قطرها 6 أمتار. خصصت الإدارة جزءا منها لزراعة الزهور (أرضية زهرية) على شكل حلقة عرضها x متر كما هو مبيّن في الشكل.
   - أ. إلى أي مجال ينتمي x ؟
   - ب. عبّر عن مساحة الأرضية الزهرية بدلالة x.
   - ج. باستعمال الأسئلة السابقة ، عيّن قيم x التي من أجلها تكون مساحة الأرضية الزهرية أصغر من أو تساوي $\frac{3}{4}$ المساحة الخضراء.

التمرين الثالث :

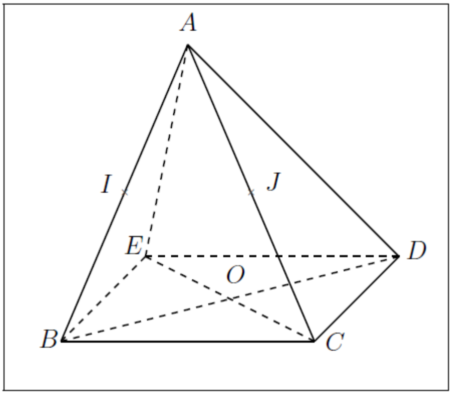
1. لتكن النّقط $A(-1 ; 2)$ ، $B(3 ; -2)$ ، $C(1 ;4)$. اكتب معادلة لكل من المستقيمين (AB) و (BC).
2. لتكن $D(-3 ; 1)$ و $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$. جدْ معادلة للمستقيم (d) الذي يشمل النّقطة D و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.
3. (Δ) مستقيم معادلته $y = \sqrt{2}x - 3$. اكتب معادلة للمستقيم (Δ') الذي يوازي المستقيم (Δ) و يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4.
4. حل الجمل الآتية ، ثمّ مثّل الحل بيانيا.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ -6x - 4y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع :

الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لهرم $ABCDE$ قاعدته متوازي الأضلاع $BCDE$ الذي مركزه O ،

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$



1. عيّن التقاطعات لكل من :
   أ. المستوي (ABC) والمستوي (ACD)
   ب. المستوي (ABD) والمستوي (AEC)
   ج. المستقيم (AO) و المستوي (BED)
2. اثبت أنّ المستقيمين (IJ) و (ED) متوازيان
3. استنتج تقاطع المستويين (ABC) و (EID)
4. اثبت أنّ المستقيم (IJ) والمستوي (BCD) متوازيان.

الموضوع التاسع

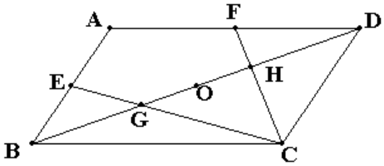
التمرين الأول :

$(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي. $A(1;1)$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OC}=-2\vec{i}$

1. علّم النقط A ، B ، C
2. عيّن إحداثيي النقطة I منتصف $[AC]$
3. عيّن إحداثيي النقطة D التي تحقق : $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
4. جد معادلة ديكارتية للمستقيم (d) الذي يشمل I ويوازي الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
5. تحقق من أنّ : $-x+y=2$ هي معادلة للمستقيم (CD)
6. ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (d) و(CD) ؟
7. احسب الطولين IA وIB واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثاني :

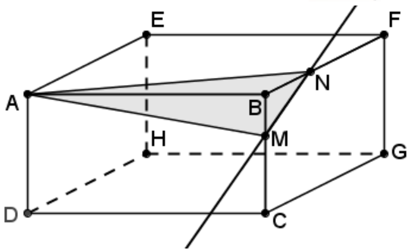
ABCD متوازي أضلاع مركزه O. E ، F منتصفا ضلعيه [AB] ، [AD] على التّرتيب.
المستقيمان (CE) ، (CF) يقطعان [BD] في النّقطتين G ، H على الترتيب.



1. بيّن أنّ النّقطة G هي مركز ثقل المثلّث ABC .
2. عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{BG}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{GO}$.
3. بنفس الطريقة السّابقة عبّر عن الشّعاع $\overrightarrow{DH}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{HO}$.
4. استنتج مما سبق أنّ $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HD}$.

التمرين الثالث :

الشكل المقابل هو تمثيل بالمنظور متساوي القياس لمتوازي مستطيلات $ABCDEFGH$.
M نقطة من $[BC]$ وN نقطة من $[BF]$



1. عيّن تقاطع المستوي (ANM) مع كل من المستويات :
(ABC) ، (ABF) ، (BCF)
2. ارسم المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويوازي المستقيم (MN) ، ثمّ اذكر الوضع النسبي لكل من :
   أ. المستقيم (Δ) والمستوي (ANM)
   ب. المستقيم (Δ) والمستوي (ADE)
   ج. المستقيم (Δ) والمستقيم (EH)
   د. المستقيم (Δ) والمستقيم (HD)
3. استنتج تقاطع المستويين (ANM) و(ADE).

التمرين الرابع :

يُعطي الجدول التالي المصاريف الشهرية لعدد من العائلات :

المصاريف الشهرية $(10^3 DA)$	من 24 إلى 25	من 25 إلى 26	من 26 إلى 28	من 28 إلى 30	من 30 إلى 32	من 32 إلى 36
عدد العائلات	12	15	25	30	10	8
التكرار م ص						
التكرار م ن						
التواتر						
التواتر م ص						
التواتر م ن						
مركز الفئة						
معامل التعديل E_k						
ارتفاع المستطيل						

1. أكمل الجدول.
2. أرسم المدرّج التكراري ومضلّع التكرارات المجمعة الصاعدة لهذه السلسلة.
3. أحسب متوسط المصاريف الشهرية للعائلات.
4. أحسب منوال و وسيط المصاريف الشهرية للعائلات و مدى لهذه السلسلة.

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

1. نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية يُطلب تعيينها إذا علمت أنّ الدالة f زوجية و $f(1) = -1$ و المنحنى الممثل للدالة f يقطع محور التراتيب عند النقطة ذات الترتيبة 3-.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ ثمّ استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$.
3. أعط جدولا لبعض قيم الدالة f ثمّ أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j})$.
4. نعتبر الدالة التآلفية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بحيث يشمل تمثيلها البياني النقطتين $A(-1 ; -1)$ و $B(2 ; 5)$.
   أ. أوجد عبارة الدالة g و شكّل جدول تغيراتها.
   ب. أرسم تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.
   ج. استنتج الحلول البيانية للمعادلة $2x^2 - 2x - 4 = 0$ و للمتراجحة $2x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

التمرين الثاني :

k عدد حقيقي. نعتبر الجملة ذات المجهولين الحقيقيين x و y

$$\begin{cases} x + ky = 100k - 50 \\ 5x + (2k+6)y = 200k + 89 \end{cases}$$

1. أجب بصحيح أم خاطئ مع التعليل :
   أ. محدد هذه الجملة هو $3k - 6$
   ب. هذه الجملة ليس لها حل من أجل $k = 2$
   ج. الثنائية (37،13) حل لهذه الجملة من أجل $k = 1$
2. طلبة وعمال عددهم الإجمالي 50 ، نظموا رحلة سياحية بمبلغ 28900 دينار. دفع كل طالب 500 دينار ودفع كل عامل 800 دينار. كم عدد كل من الطلبة والعمال ؟

التمرين الثالث :

(C) دائرة مركزها O. $[AB]$ و $[CD]$ وتران للدائرة (C) حيث D تنتمي إلى القوس AB الذي لا يشمل النقطة C. المستقيم (AB) يقطع المستقيم (DC) في النقطة E.

1. أنشئ شكلا مناسبا

2. بيّن أنّ المثلثين ACE و DEB متشابهان
3. اثبت أنّ $DB \times AE = AC \times DE$
4. إذا علمت أنّ $AC = 5$ ، $AE = 4$ و $DE = 3$ ، احسب الطول DB.

التمرين الرابع :

$ABCD$ متوازي أضلاع ، J منتصف القطعة $[AD]$ ، I منتصف القطعة $[AB]$

1. أنشئ الشكل
2. اكتب كلا من الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AJ}$
3. استنتج أنّ الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطّيا
4. لتكن H النقطة التي تحقق : $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. برهن أنّ النقط H ، J ، I في استقامية.

الموضوع الحادي عشر

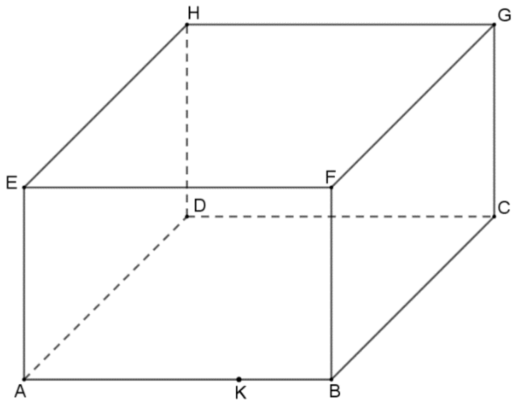
التمرين الأول :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:
$A(0;-1)$ ، $B(-2;1)$ ، $\overrightarrow{OD}=-4\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-2)$.

1. أ. جد إحداثيات النقطتين C و D.
   ب. بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.
2. أ. اكتب معادلة المستقيم (BC).
   ب. هل النقطة D تنتمي إلى المستقيم (BC)؟
3. اكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و $\vec{u}(-3;1)$ شعاع توجيه له.
4. بيّن أنّ المستقيمين (BC) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة يُطلب تعيينها.

التمرين الثاني :

نعتبر متوازي المستطيلات المقابل، K نقطة كيفية من القطعة المستقيمة $[AB]$.



الهدف من هذا التمرين هو دراسة تقاطع المستوي (EGK) مع المستقيم (BC).

1. الحالات الخاصة: حدد مع التبرير التقاطع في حالة K منطبقة على:
   أ. النقطة A ب. النقطة B
2. نعتبر K في القطعة المستقيمة المفتوحة $]AB[$.
   أ. هل القطعة $[KG]$ هي على أحد أوجه متوازي المستطيلات؟
   ب. أنشئ النقطة L تقاطع المستقيم (EK) مع المستقيم (FB).
   ج. قدّم تبريرا لتقاطع المستقيم (GL) مع المستقيم (BC)، نسميها M.
   د. استنتج المطلوب.
3. إذا علمت أنّ: $FB=2{,}5\ cm$ ، $EF=4\ cm$ و $FG=3\ cm$.
   احسب حجم رباعي الوجوه $BFEG$.

التمرين الثالث :

(C) دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = 5$ ، $[AB]$ وتر في هذه الدائرة ، H المسقط العمودي للنقطة O على الوتر $[AB]$ بحيث $OH = 3$.

1. أنشئ شكلا مناسبا
2. عيّن طبيعة المثلث OAB ، ثم احسب طول الوتر $[AB]$
3. لتكن النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة إلى المركز O. عيّن طبيعة المثلث ABE ، ثم احسب الطول BE
4. لتكن النقطة K منتصف $[BE]$. بيّن أنّ المثلثين KOH و ABE متشابهان وعيّن نسبة التشابه.

التمرين الرابع :

كانت نتائج دراسة إحصائية حول عدد ساعات المراجعة اليومية المنزلية لـ 23 تلميذ كما يلي:

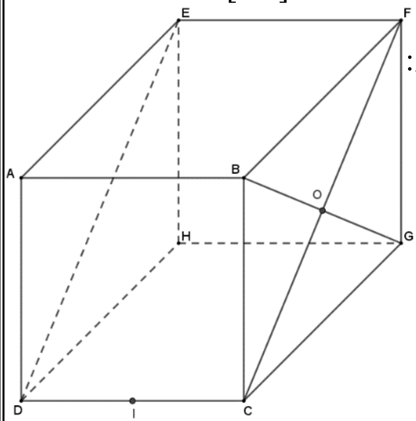
1,5	1,5	2	1	2,5	3	3	0,5	0,5	1	2	0,5
0,5	1	1	3	2	0,5	0,5	1,5	2	2,5	1	

1. رتب النتائج السابقة ترتيبا تصاعديا ثمّ لخصها في جدول تبيّن فيه كل قيمة وتكرارها.
2. احسب الوسط الحسابي $\bar{x}$ والوسيط Med لهذه السلسلة الإحصائية.
3. احسب كلا من الربعي الأول Q_1 والربعي الثالث Q_3 ثمّ أنشئ المخطط بالعلبة لهذه السلسلة الإحصائية.
4. احسب النسبة المئوية للقيم المحصورة بين Q_1 و Q_3.

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول:

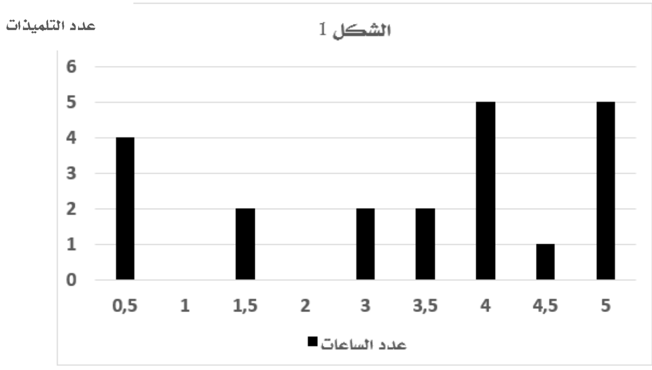
ليكن المكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4cm$ ، I منتصف القطعة $[DC]$.



1. حدد الوضع النسبي في الحالات الآتية مع التبرير:
   أ. المستقيمان (DE) و(BC)
   ب. المستقيمان (DE) و(DC)
   ج. المستقيم (AB) والمستوي (EFC)
   د. المستويان (DGH) و(DEI)
2. عيّن طبيعة الرباعي $DEFC$.
   أ. استنتج طبيعة المثلث DEI
   ب. احسب طول القطعة $[IE]$
3. لتكن O نقطة تقاطع قطري المربّع $BFGC$.
   حدّد طبيعة المجسّم $OAEHD$ ثمّ احسب حجمه.

التمرين الثاني:

سئلت 30 تلميذة عن عدد الساعات التي تقضيها كل واحدة منهن في المراجعة المنزلية اليومية، فكانت النتائج في مخطط الشكل 1.



نعتبر a هو عدد التلميذات اللواتي يقضين ساعة واحدة و b عدد التلميذات اللواتي يقضين ساعتين في المراجعة المنزلية اليومية.

1. أكمل المخطط 1 الموجود في الوثيقة المرفقة إذا علمت أنّ: $a = 2b$.
2. نضع فيما بقي من التمرين: $a = 6$ و $b = 3$.
   أ. احسب المدى، الوسط الحسابي والوسيط لهذه السلسلة.
   ب. بعد توجيهات الأستاذ، قرّرت كل تلميذة أنّها تضاعف مدّة المراجعة اليومية. عيّن الوسط الحسابي في هذه الحالة.

3. وزعت الساعات المذكورة في بداية التمرين على شكل فئات طول كل فئة هو 1.
أ. أنشئ المدرج التكراري.
ب. اعد حساب الوسط الحسابي والوسيط لهذه السلسلة.

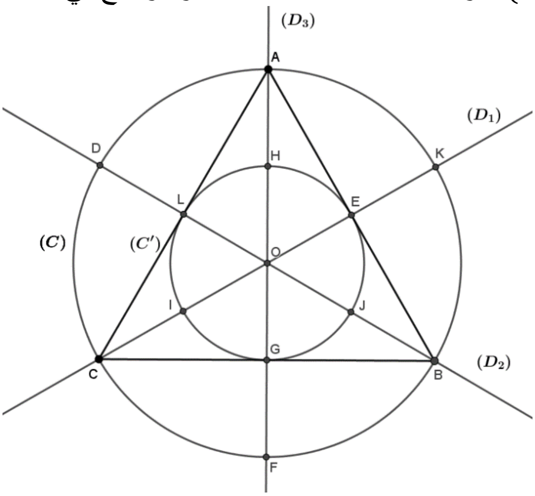
التمرين الثالث:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$. m عدد حقيقي يختلف عن (-2)
نعتبر المستقيم (Δ_m) ذا المعادلة: $(m+2)x+(m^2-4)y+1=0$.

1. عيّن معادلة كل من المستقيمين (Δ_0) و (Δ_1) ثمّ مثلهما (الوحدة: $3cm$)
2. عيّن نقطة تقاطع المستقيمين (Δ_0) و (Δ_1) حسابيا ثمّ تحقق من ذلك بيانيا.
3. جد قيم m حتى تكون النقطة $A(2;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).
4. ليكن المستقيم (D) الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;1)$.
أ. اكتب معادلة المستقيم (D).
ب. جد قيم m حتى يكون المستقيمان (Δ_m) و (D) متوازيين.

التمرين الرابع:

(C) الدائرة التي تشمل رؤوس المثلث ABC المتقايس الأضلاع و (C') الدائرة التي تمسّ أضلاع المثلث ABC من الداخل.
(D_1) ، (D_2) و (D_3) متوسطات المثلث ABC كما هو موضح في الشكل.



1. عيّن صورة المثلث OGB بـ:
أ. التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (D_1).
ب. التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O.
ج. الدوران الذي مركزه O وزاويته $120°$ في الاتجاه المباشر.
2. بيّن أنّ مساحة الدائرة (C') تساوي ربع مساحة الدائرة (C).

سلسلة 2	أولمبياد الرياضيات	

<u>تمرين 1</u> : a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا حيث : $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ، بين أن : $a=b$

<u>تمرين 2</u> : a و b عددان حقيقيان موجبان قطعـــا . بين أن : $4 \le \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$

<u>تمرين 3</u> : x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا و مختلفة مثنى مثنى حيث : $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$

احسب قيمة الجذاء : xyz

<u>تمرين 4</u> :

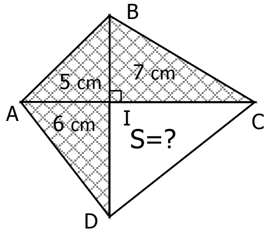
$ABCD$ رباعي محدب قطراه متعامدان و متقاطعان في نقطة I.

علما أن : مساحة المثلث BIC هي $7cm$

و مساحة المثلث AIB هي $5cm$

و مساحة المثلث AID هي $6cm$

- فاحسب مساحة المثلث : DIC



<u>تمرين 5</u> : ABC مثلــث محيطه p و M نقطة داخله . بين أن : $\frac{p}{2}<MA+MB+MC<p$

<u>تمرين 6</u> : x و y عددان حقيقيان موجبان.

- بين أن : $x+y \ge 2\sqrt{xy}$
- a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة. بين أن : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \ge 4$

<u>تمرين 7</u> : x عدد حقيقي موجب قطعا حيث : $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$ ، احسب : $x^2+\frac{1}{x^2}$

<u>تمرين 8</u> : x و y عددان حقيقيان موجبان حيث : $x>y$ و $x^2+y^2=3xy$ ، احسب : $\frac{x+y}{x-y}$

<u>تمرين 9</u> :

$ABCD$ مستطيل حيث : $AB=8$ و $BC=6$ ، H و K على التوالي المسقطان العموديان لـ A و C على (BD)

- احسب KH

<u>تمرين 10</u>: ABC مثلث ، $[BH]$ و $[CK]$ ارتفاعان فيه ($H \in (AC)$ و $K \in (AB)$)

- برهن أن : $K\hat{H}B=K\hat{C}B$

حلول الاختبارات الفصل الأول

الموضوع الأول

التمرين الأول :

أجب بصحيح أم خاطئ مع التعليل :

1. $\frac{3-10^{-14}}{2} > \frac{3-10^{-15}}{2}$ **: صحيح**

$$10^{15} > 10^{14} \Rightarrow \frac{1}{10^{15}} < \frac{1}{10^{14}} \Rightarrow 10^{-15} < 10^{-14} \Rightarrow -10^{-15} > -10^{-14}$$

$$\Rightarrow 3 - 10^{-15} > 3 - 10^{-14} \Rightarrow \boxed{\frac{3 - 10^{-15}}{2} > \frac{3 - 10^{-14}}{2}}$$

2. **إذا كان $a + b = 0$ فإنّ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$ ، حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}^*$: صحيح**

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0}$$

3. **المدوّر إلى 10^{-2} للعدد $\frac{0{,}7\times10^{-4}}{14\times10^{-2}}$ يساوي $0{,}01$: خطأ**

$$\frac{0{,}7 \times 10^{-4}}{14 \times 10^{-2}} = \frac{7 \times 10^{-5}}{14 \times 10^{-2}} = \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0{,}5 \times 10^{-3} = \boxed{0{,}0005}$$

4. **مجموعة حلول المعادلة $|x - 1| = -2$ هي : $S = \{-1; 4\}$: خطأ**

$|x - 1| \geq 0$ (القيمة المطلقة موجبة دوما والمعادلة السابقة لا تقبل حلولا)

5. **2 هو مركز المجال [1 ; 3] : صحيح**

$$c = \frac{1 + 3}{2} \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

6. **رتبة مقدار العدد $-17{,}23 \times 10^{-2}$ هي -2×10^{-1} : صحيح**

الكتابة العلمية للعدد $-17{,}23 \times 10^{-2}$ هي $-1{,}723 \times 10^{-1}$

رتبة مقدار العدد $-17{,}23 \times 10^{-2}$ هي -2×10^{-1}

7. **إذا كان $-2 \leq x \leq 4$ فإنّ $d(x\ ;\ 1) \leq 6$: خطأ**

$$-2 \leq x \leq 4\,; c = \frac{-2 + 4}{2} = 1\,; r = 4 - 1 = 3\,; \boxed{d(x; 1) \leq 3}$$

8. **إذا كان a و b طول ضلعي مثلث قائم ، فإنّ طول الوتر c عدد طبيعي : صحيح**

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left[\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{6}\right)\right]^2 + \left(3 - \sqrt{6}\right)^2 = 3\left(7 + 2\sqrt{6}\right) + 15 - 6\sqrt{6}$$

$$c^2 = 21 + 6\sqrt{6} + 15 - 6\sqrt{6} = 36 \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

9. **العدد $5(n + 1)$ غير أولي : صحيح**

للعدد $5(n + 1)$ أربعة قواسم على الأقل هي : 1 ، 5 ، $n + 1$ ، $5(n + 1)$

10. **إذا كان $-2 \leq x^2 \leq 4$ فإنّ $x \in [1; 2]$: خطأ**

$$-2 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 2}$$

التمرين الثاني :

لتكن I مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث : $-3 < x < -1$ ، و المجال $J = [-2 ; +\infty[$.

1. **كتابة المجموعة I على شكل مجال**

$-3 < x < -1 \Rightarrow \boxed{I =]-3;-1[}$

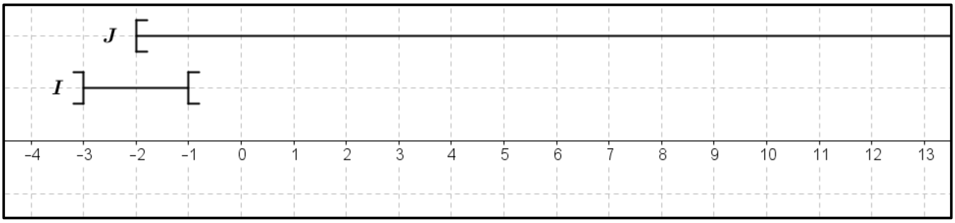
2. **بيان أنّ العدد الحقيقي x^2 ينتمي إلى المجال J إذا كان x ينتمي إلى المجال I**

$x \in I \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow 1 < x^2 < 9 \Rightarrow x^2 \in]1;9[\Rightarrow \boxed{x^2 \in J}$

3. **تعيين المجموعتين $I \cup J$ و $I \cap J$**

$I \cup J =]-3;-1[\cup [-2;+\infty[= \boxed{]-3;+\infty[}$

$I \cap J =]-3;-1[\cap [-2;+\infty[= \boxed{[-2;-1[}$



4. **حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $|x-1| = |x+2|$**

$$|x-1| = |x+2| \Rightarrow \begin{cases} x-1 = x+2 \\ \text{أو} \\ x-1 = -x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2 \ \text{... مستحيل} \\ \text{أو} \\ 2x = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S_1 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

5. **حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $|x+2| < 1$**

$|x+2| < 1 \Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow \boxed{S_2 =]-3;-1[}$

استنتاج مجموعة حلول المتراجحة $|x+2| \geq 1$

$|x+2| \geq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} -]-3;-1[\Rightarrow \boxed{S_3 =]-\infty;-3] \cup [-1;+\infty[}$

بما أنّ $S_2 =]-3;-1[$ ، فمجموعة حلول المتراجحة $|x+2| < 1$ هي المجال I

التمرين الثالث :

1. **تعيين مجموعة تعريف الدالة f**

$D_f = [-4;6]$

2. **تعيين صور الأعداد : -4 ، -1 ، 2 ، 6 بالدالة f**

$f(-4) = -7 \,; f(-1) = 5 \,; f(2) = 0 \,; f(6) = 5$

3. **تعيين سوابق الأعداد : -7 ، 0 ، 5 ، 6 بالدالة f**

للعدد -7 سابقة واحدة هي -4

للعدد 0 ثلاث سوابق هي -3 ، 2 و 5

للعدد 5 سابقتان هما -1 و 6

العدد 6 ليس له سابقة

4. جدول تغيرات الدالة f

x	-4		-1		$3{,}5$		6
$f(x)$	-7	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

التمرين الرابع :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\lvert x+1\rvert \leq 4$	$d(x;-1) \leq 4$	$x \in [-5;3]$	$\boldsymbol{-5 \leq x \leq 3}$
$\left\lvert x-\frac{3}{2}\right\rvert \leq \frac{7}{2}$	$d\left(x;\frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$	$\boldsymbol{x \in [-2;5]}$	$-2 \leq x \leq 5$
$\lvert x+8\rvert < 2$	$\boldsymbol{d(x;-8) < 2}$	$x \in \left]-10;-6\right[$	$-10 < x < -6$
$\boldsymbol{\left\lvert x+\frac{2}{3}\right\rvert < 1}$	$d\left(x;-\frac{2}{3}\right) < 1$	$x \in \left]-\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right[$	$-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}$

1. $-5 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \in [-5;3]\,; c = \frac{-5+3}{2} = -1\,; r = 3+1 = 4$
   $-5 \leq x \leq 3 \Rightarrow d(x;-1) \leq 4 \Rightarrow \lvert x+1\rvert \leq 4$
2. $x \in [-2;5] \Rightarrow -2 \leq x \leq 5\,; c = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}\,; r = 5-\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$
   $x \in [-2;5] \Rightarrow d\left(x;\frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2} \Rightarrow \left\lvert x-\frac{3}{2}\right\rvert \leq \frac{7}{2}$
3. $d(x;-8) < 2 \Rightarrow \lvert x+8\rvert < 2 \Rightarrow -8-2 < x < -8+2$
   $d(x;-8) < 2 \Rightarrow -10 < x < -6 \Rightarrow x \in \left]-10;-6\right[$
4. $\left\lvert x+\frac{2}{3}\right\rvert < 1 \Rightarrow d\left(x;-\frac{2}{3}\right) < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3}-1 < x < -\frac{2}{3}+1$
   $\left\lvert x+\frac{2}{3}\right\rvert < 1 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left]-\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right[.$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\|x-2\| \leq 5$	$d(x;2) \leq 5$	$x \in [-3;7]$	$\boldsymbol{-3 \leq x \leq 7}$
$\|x+2\| \leq 3$	$d(x;-2) \leq 3$	$\boldsymbol{x \in [-5;1]}$	$-5 \leq x \leq 1$
$\left\|x-\frac{7}{2}\right\| < \frac{5}{2}$	$\boldsymbol{d\left(x;\frac{7}{2}\right) < \frac{5}{2}}$	$x \in]1;6[$	$1 < x < 6$
$\boldsymbol{\left\|x-\frac{3}{5}\right\| \leq \frac{3}{5}}$	$d\left(x;\frac{3}{5}\right) \leq \frac{3}{5}$	$x \in \left[0;\frac{6}{5}\right]$	$0 \leq x \leq \frac{6}{5}$

1. $-3 \leq x \leq 7 \Rightarrow x \in [-3;7]\,; c = \frac{-3+7}{2} = 2\,; r = 7-2 = 5$
   $-3 \leq x \leq 7 \Rightarrow d(x;2) \leq 5 \Rightarrow |x-2| \leq 5$
2. $x \in [-5;1] \Rightarrow -5 \leq x \leq 1\,; c = \frac{-5+1}{2} = -2\,; r = 1+2 = 3$
   $x \in [-5;1] \Rightarrow d(x;-2) \leq 3 \Rightarrow |x+2| \leq 3$
3. $d\left(x;\frac{7}{2}\right) < \frac{5}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{7}{2}\right| < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{7}{2}-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}+\frac{5}{2}$
   $d\left(x;\frac{7}{2}\right) < \frac{5}{2} \Rightarrow 1 < x < 6 \Rightarrow x \in]1;6[$
4. $\left|x-\frac{3}{5}\right| \leq \frac{3}{5} \Rightarrow d\left(x;\frac{3}{5}\right) \leq \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5}-\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}+\frac{3}{5}$
   $\left|x-\frac{3}{5}\right| \leq \frac{3}{5} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{6}{5} \Rightarrow x \in \left[0;\frac{6}{5}\right].$

التمرين الثاني :

I- لتكن المجموعتين K و L حيث : $\boldsymbol{K = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |x+3| \leq 2\}}$
$\boldsymbol{L = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |2x+1| \geq 3\}}$

1. كتابة كلا من المجموعتين K و L على شكل مجال

$|x+3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x+3 \leq 2 \Rightarrow -5 \leq x \leq -1 \Rightarrow \boxed{K = [-5;-1]}$

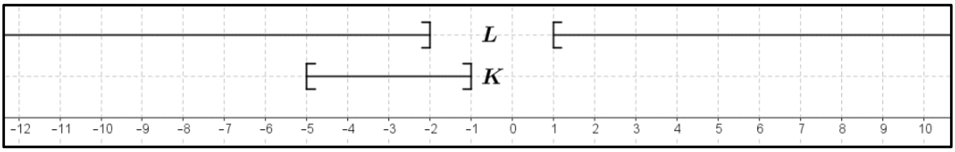
$$|2x+1| \geq 3 \Rightarrow \begin{array}{c} 2x+1 \leq -3 \\ \text{أو} \\ 2x+1 \geq 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 2x \leq -4 \\ \text{أو} \\ 2x \geq 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \leq -2 \\ \text{أو} \\ x \geq 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \in]-\infty;-2] \\ \text{أو} \\ x \in [1;+\infty[\end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{L =]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[}$$

2. تعيين المجموعتين $K \cup L$ و $K \cap L$

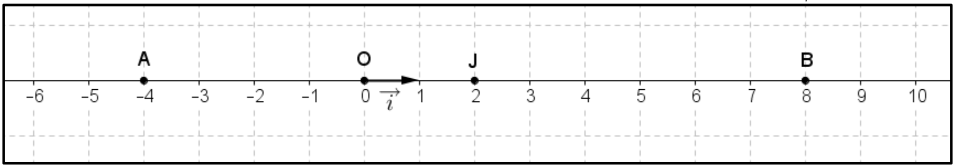
$K \cup L = [-5;-1] \cup (]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[) = \boxed{]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[}$

$K \cap L = [-5;-1] \cap (]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[) = \boxed{[-5;-2]}$



II- على مستقيم (Δ) مزوّد بمعلم $(O;\vec{i})$:

1. تعليم النقط A ، B و J



2. تعيين قيم العدد x من أجل كل حالة مما يلي :

أ. $|x+4| = |x-8|$

$|x+4| = |x-8| \Rightarrow d(x;-4) = d(x;8) \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M = J \Rightarrow \boxed{x = 2}$

ب. $|x+4| > |x-8|$

$|x+4| > |x-8| \Rightarrow d(x;-4) > d(x;8) \Rightarrow MA > MB \Rightarrow \boxed{x \in]2;+\infty[}$

ج. $|x+4| + |x-8| = 12$

$|x+4| + |x-8| = 12 \Rightarrow d(x;-4) + d(x;8) = 12 \Rightarrow MA + MB = 12$
$\Rightarrow M \in [AB] \Rightarrow \boxed{x \in [-4;8]}$

التمرين الثالث :

1. تعيين صور الأعداد الحقيقية : 0 ، 2- ، 4 وفق الدالة f

$f(0) = -1$; $f(-2) = 0$; $f(4) = 3$

2. تعيين سوابق الأعداد الحقيقية : 0 ، 2 ، 3-

للعدد 0 سابقتان هما -2 و 1
للعدد 2 سابقة واحدة هي 2
العدد -3 ليست له سابقة

3. **تحديد اتجاه تغير الدالة f**

الدالة f متزايدة : $x \in [0;4]$; الدالة f متناقصة : $x \in [-8;0] \cup [4;8]$

4. **تعيين إشارة $f(x)$**

الدالة f سالبة : $x \in [-2;1]$; الدالة f موجبة : $x \in [-8;-2] \cup [1;8]$

استنتاج حلول المتراجحة : $f(x) \geq 0$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in [-8;-2] \cup [1;8]}$$

التمرين الرابع :

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $xy \neq -1$. نضع : $A = \frac{x+y}{1+xy}$

1. **حساب A من أجل $x = \frac{1}{3}$ و $y = -\frac{2}{5}$**

$$A = \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{5}{15} - \frac{6}{15}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{-\frac{1}{15}}{\frac{13}{15}} = -\frac{1}{15} \times \frac{15}{13} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{13}}$$

2. **حساب $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$**

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2 - 2\sqrt{6} = \boxed{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2 + 2\sqrt{6} = \boxed{5 + 2\sqrt{6}}$$

3. **بيان أنّ $A = \sqrt{3}$ من أجل $x = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ و $y = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$**

$$A = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \times \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}}{1 + \sqrt{\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right)}}$$

$$A = \frac{\left|\sqrt{3} + \sqrt{2}\right| + \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|}{1 + \sqrt{(5)^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{25 - 24}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{3}}$$

4. **بيان أنّه من أجل كل x و y حيث $xy \neq -1$ ، فإنّ :**

$$\mathbf{1 + A = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}} \quad \text{و} \quad \mathbf{1 - A = \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy}}$$

$$1 + A = 1 + \frac{x+y}{1+xy} = \frac{1 + xy + x + y}{1+xy} = \frac{(x+1) + y(x+1)}{1+xy}$$

$$\boxed{1 + A = \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy}}$$

$$1 - A = 1 - \frac{x + y}{1 + xy} = \frac{1 + xy - x - y}{1 + xy} = \frac{(1 - x) - y(1 - x)}{1 + xy}$$

$$= \frac{(1 - x)(1 - y)}{1 + xy} = \frac{[-(x - 1)][-(y - 1)]}{1 + xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + A = \frac{(x - 1)(y - 1)}{1 + xy}}$$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\|x-1\|<3$	$d(x;1)<3$	$x\in\,]-2;4[$	$\boldsymbol{-2<x<4}$
$\|x-1\|<6$	$d(x;1)<6$	$\boldsymbol{x\in\,]-5;7[}$	$-5<x<7$
$\|x+2\|\le 2$	$\boldsymbol{d(x;-2)\le 2}$	$x\in[-4;0]$	$-4\le x\le 0$
$\boldsymbol{\left\|x-\frac{3}{2}\right\|\le\frac{5}{2}}$	$d\left(x;\frac{3}{2}\right)\le\frac{5}{2}$	$x\in[-1;4]$	$-1\le x\le 4$

1. $-2<x<4\Rightarrow x\in\,]-2;4[\,;c=\frac{-2+4}{2}=1\,;r=4-1=3$
   $-2<x<4\Rightarrow d(x;1)<3\Rightarrow|x-1|<3$
2. $x\in\,]-5;7[\,\Rightarrow -5<x<7\,;c=\frac{-5+7}{2}=1\,;r=7-1=6$
   $x\in\,]-5;7[\,\Rightarrow d(x;1)<6\Rightarrow|x-1|<6$
3. $d(x;-2)\le 2\Rightarrow|x+2|\le 2\Rightarrow -2-2\le x\le -2+2$
   $d(x;-2)\le 2\Rightarrow -4\le x\le 0\Rightarrow x\in[-4;0]$
4. $\left|x-\frac{3}{2}\right|\le\frac{5}{2}\Rightarrow d\left(x;\frac{3}{2}\right)\le\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$
   $\left|x-\frac{3}{2}\right|\le\frac{5}{2}\Rightarrow -1\le x\le 4\Rightarrow x\in[-1;4].$

التمرين الثاني :

1. تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f

$D_f=[-4;7]$

2. تعيين سوابق العدد 0 بالدالة f

للعدد 0 ثلاث سوابق هي -3 ، 2 و 6

3. اتمام الجدول :

x	-6	-2	0	4، -4	2	4	7	10
$f(x)$	لا توجد	-1	-3	4	0	4	-2	لا توجد

4. تعيين حلول المعادلات التالية :

أ. $f(x) = -4$

المعادلة $f(x) = -4$ لا تقبل حلول لأنّ $f(x) \geq -3$

ب. $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ أو $x = 2$ أو $x = 6 \Rightarrow \boxed{S = \{-3; 2; 6\}}$

ج. $f(x) = 4$

$f(x) = 4 \Rightarrow x = -4$ أو $x = 4 \Rightarrow \boxed{S = \{-4; 4\}}$

5. جدول تغيّرات الدالة f

x	-4		0		4		7
$f(x)$	4	↘	-3	↗	4	↘	-2

6. جدول إشارة الدالة f

x	-4		-3		2		6		7
$f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

7. تعيين حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ بيانيا

$f(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{S = [-3; 2] \cup [6; 7]}$ (عندما يكون المنحنى تحت محور الفواصل)

التمرين الثالث :

ليكن L عدد حقيقي حيث : $L = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

1. مقارنة العددين $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ و $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

$2\sqrt{3} > -2\sqrt{3} \Rightarrow 4 + 2\sqrt{3} > 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} > \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

2. بيان أنّ إشارة العدد L موجبة

$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} > \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow \boxed{L > 0}$

3. حساب L^2

$$L^2 = \left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$L^2=\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\times\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$L^2=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}$$

$$L^2=8-2\sqrt{(4)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=8-2\sqrt{16-12}=8-2\sqrt{4}=8-4$$

$$\boxed{L^2=4}$$

استنتاج قيمة مبسّطة للعدد L

بما أنّ العدد $L>0$ (حسب السؤال 2) ، نستنتج أنّ :

$$L^2=4\Rightarrow L=\sqrt{4}\Rightarrow \boxed{L=2}$$

التمرين الرابع :

ليكن x عدد حقيقي حيث : $\left|x-\frac{5}{2}\right|\leq\frac{3}{2}$

1. اثبات أنّ $1\leq x\leq 4$

$$\left|x-\frac{5}{2}\right|\leq\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{3}{2}\leq x-\frac{5}{2}\leq\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow\boxed{1\leq x\leq 4}$$

2. تعيين حصر لكل من العددين :

أ. x^2+2x-3

$$1\leq x\leq 4\Rightarrow\begin{cases}1\leq x^2\leq 16\\ 2\leq 2x\leq 8\end{cases}\Rightarrow 3\leq x^2+2x\leq 24$$

$$\Rightarrow\boxed{0\leq x^2+2x-3\leq 21}$$

ب. $\frac{\sqrt{x}}{x+2}$

$$1\leq x\leq 4\Rightarrow\begin{cases}1\leq\sqrt{x}\leq 2\\ 3\leq x+2\leq 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\leq\sqrt{x}\leq 2\\ \frac{1}{6}\leq\frac{1}{x+2}\leq\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{6}\leq\frac{\sqrt{x}}{x+2}\leq\frac{2}{3}}$$

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

أجب بصحيح أم خاطئ مع التعليل على ما يلي :

1. $\boldsymbol{0,2 < (0,2)^2 < (0,2)^3}$ **: خاطئ**

$0 < 0{,}2 < 1 \Rightarrow \boxed{0{,}2 > (0{,}2)^2 > (0{,}2)^3}$

2. $\boldsymbol{1,2 > (1,2)^2 > (1,2)^3}$ **: خاطئ**

$1{,}2 > 1 \Rightarrow \boxed{1{,}2 < (1{,}2)^2 < (1{,}2)^3}$

3. $\boldsymbol{-0,2 < -(0,2)^2 < -(0,2)^3}$ **: صحيح**

$0 < 0{,}2 < 1 \Rightarrow 0{,}2 > (0{,}2)^2 > (0{,}2)^3 \Rightarrow \boxed{-0{,}2 < -(0{,}2)^2 < -(0{,}2)^3}$

4. $\boldsymbol{\frac{1}{3} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{3^3}}$ **: صحيح**

$3 < 3^2 < 3^3 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{3^3}}$

5. $\boldsymbol{|x-2| \leq 1}$ **معناه** $\boldsymbol{1 \leq x \leq 3}$ **حيث** $\boldsymbol{x}$ **عدد حقيقي : صحيح**

$|x-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 2-1 \leq x \leq 2+1 \Rightarrow \boxed{1 \leq x \leq 3}$

6. $\boldsymbol{|2-x| \leq 1}$ **معناه** $\boldsymbol{x \in [1;\ 3]}$ **حيث** $\boldsymbol{x}$ **عدد حقيقي : صحيح**

$|2-x| \leq 1 \Rightarrow |x-2| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \boxed{x \in [1;3]}$

التمرين الثاني :

1. **تعيين مجموعة تعريف الدالة** $\boldsymbol{f}$

$D_f = [-2;2]$

2. **تعيين صور الأعداد :2- ، 1- ، 0 ، 1**

$f(-2) = -2\ ; f(-1) = 2\ ; f(0) = 0\ ; f(1) = -2$

3. **تعيين سوابق العددين : 2- و 2**

للعدد 2- سابقتان هما 2- و 1

للعدد 2 سابقتان هما 1- و 2

4. **جدول تغيرات الدالة** $\boldsymbol{f}$

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

5. **تعيين القيّم الحدّية للدالة f**

للدالة f قيمتان حدّيتان هما 2- و 2

II- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-1$

1. **بيان أنّ g دالة زوجية**

بما أنّ $D_g=\mathbb{R}$ فهو متناظر بالنسبة إلى الصفر $(x\in D_g \Rightarrow -x\in D_g)$

ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$g(-x)=\frac{1}{2}(-x)^2-1=\frac{1}{2}x^2-1=g(x)$$

منه ، نستنتج أنّ الدالة g زوجية

2. **دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على المجال $]-\infty;0]$**

ليكن x_1 و x_2 عددان حقيقيان من المجال $]-\infty;0]$. لدينا :

$$x_1\leq x_2\leq 0\Rightarrow x_1^2\geq x_2^2\geq 0\Rightarrow \frac{1}{2}x_1^2\geq\frac{1}{2}x_2^2\Rightarrow\frac{1}{2}x_1^2-1\geq\frac{1}{2}x_2^2-1$$
$$\Rightarrow \boxed{g(x_1)\geq g(x_2)}$$

منه، نستنتج أنّ الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;0]$

استنتاج اتجاه تغيّرها على المجال $[0;+\infty[$

بما أنّ الدالة g زوجية، فإنّ منحناها البياني يقبل محور تناظر الذي هو محور التراتيب

ومنه، نستنتج أنّ الدالة g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

التمرين الثالث :

$$2x+y\in[-2;5] \quad \text{وَ} \quad x+2y\in[1;7]$$

1. **اثبات أن : $-1\leq 3x+3y\leq 12$**

$$\begin{cases}-2\leq 2x+y\leq 5\\ 1\leq x+2y\leq 7\end{cases}\xRightarrow[\text{نجمع طرفي المتراجحتين}]{}\boxed{-1\leq 3x+3y\leq 12}$$

2. **استنتاج حصر للعددين $x+y$ و $-x-y$**

$$-1\leq 3x+3y\leq 12\Rightarrow -1\leq 3(x+y)\leq 12\Rightarrow\boxed{-\frac{1}{3}\leq x+y\leq 4}$$

$$-\frac{1}{3}\leq x+y\leq 4\Rightarrow -4\leq -(x+y)\leq\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{-4\leq -x-y\leq\frac{1}{3}}$$

3. **حصر العددين x و y**

$$\begin{cases}-2\leq 2x+y\leq 5\\ -4\leq -x-y\leq\frac{1}{3}\end{cases}\xRightarrow[\text{نجمع طرفي المتراجحتين}]{}-6\leq x\leq\frac{16}{3}\Rightarrow\boxed{x\in\left[-6;\frac{16}{3}\right]}$$

$$\begin{cases}1\leq x+2y\leq 7\\ -4\leq -x-y\leq\frac{1}{3}\end{cases}\xRightarrow[\text{نجمع طرفي المتراجحتين}]{}-3\leq y\leq\frac{22}{3}\Rightarrow\boxed{y\in\left[-3;\frac{22}{3}\right]}$$

4. استنتاج أصغر مجال يشمل x و y في آن واحد

أصغر مجال يشمل x و y في آن واحد هو $\left[-6;\frac{22}{3}\right]$.

التمرين الرابع :

1. حساب مساحة شبه المنحرف ABCD

$$\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{(AB+DC)\times AD}{2}=\frac{(8+5)\times 4}{2}\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{ABCD}=26}$$

2. $\boldsymbol{DM=x}$

أ. تعيين القيم الممكنة للعدد x

بما أنّ M نقطة من $[DC]$ فإنّ $\boxed{x\in[0;5]}$

ب. حساب $f(x)$ بدلالة x

$$\mathcal{A}_{ADMF}=AD\times DM\Rightarrow \boxed{f(x)=4x}$$

3. $\boldsymbol{g(x)=\mathcal{A}_{BCMF}}$

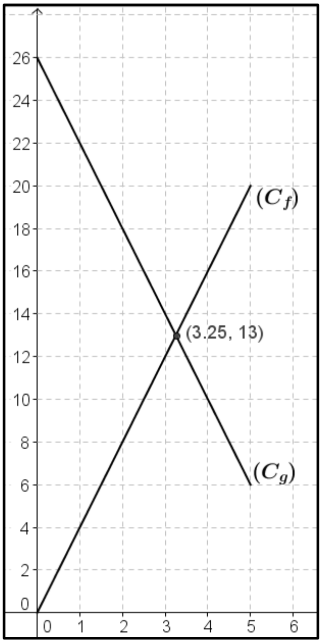
أ. تعيين عبارة $g(x)$ بدلالة x

$$\mathcal{A}_{BCMF}=\mathcal{A}_{ABCD}-\mathcal{A}_{ADMF}\Rightarrow \boxed{g(x)=26-4x}$$

ب. انشاء المنحنيين الممثلين للدالتين f و g

ج. استنتاج حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ بيانيا

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \boxed{x=3{,}25\ ;\left(x=\frac{13}{4}\right)}$$



الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1. حساب $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}+2\right)^2$

$$\left(\sqrt{3}-2\right)^2 = 3+4-4\sqrt{3} = 7-4\sqrt{3}$$
$$\left(\sqrt{3}+2\right)^2 = 3+4+4\sqrt{3} = 7+4\sqrt{3}$$

2. استنتاج تبسيط للعدد $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\left|2\sqrt{3}-2\right|$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\left|2\sqrt{3}-2\right| \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}-\left|2\sqrt{3}-2\right| \\
&= \left|\underbrace{\sqrt{3}+2}_{>0}\right|+\left|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{<0}\right|-\left|\underbrace{2\sqrt{3}-2}_{>0}\right| \\
&= \sqrt{3}+2+\left(-\sqrt{3}+2\right)-\left(2\sqrt{3}-2\right) \\
&= \sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2 = \boxed{6-2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

3. α عدد حقيقي من المجال $[-4;-2]$. نضع : $x=-\frac{1}{2}\alpha-1$

تعيين حصر للعدد x

$$-4 \le \alpha \le -2 \Rightarrow -2 \le \frac{1}{2}\alpha \le -1 \Rightarrow 1 \le -\frac{1}{2}\alpha \le 2$$
$$\Rightarrow 0 \le -\frac{1}{2}\alpha - 1 \le 1 \Rightarrow \boxed{0 \le x \le 1}$$

المقارنة بين الأعداد x ، x^2 و x^3

بما أنّ $0 \le x \le 1$ ، فإنّ $\boxed{x^3 \le x^2 \le x}$

التمرين الثاني :

1. مقارنة العددين A و B حيث : $A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ وَ $B=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$$A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{7-5}=\boxed{\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}}$$

$$B=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}}$$

منه ، نستنتج أنّ $\boxed{A=B}$

2. **مقارنة العددين $(-2x+3)$ وَ $(-2x+3)^2$ علما أنّ $1 < x < \frac{3}{2}$.**

$$1 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 < 2x < 3 \Rightarrow -3 < -2x < -2 \Rightarrow 0 < -2x+3 < 1$$

بما أنّ $0 < -2x+3 < 1$ ، فإنّ $\boxed{(-2x+3) > (-2x+3)^2}$

3. **اعطاء حصر لارتفاع المثلث h**

$$S = B \times h \Rightarrow h = \frac{S}{B}$$

$$\begin{cases} 51 \leq S \leq 52 \\ 7{,}9 \leq B \leq 8{,}9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 51 \leq S \leq 52 \\ \frac{1}{8{,}9} \leq \frac{1}{B} \leq \frac{1}{7{,}9} \end{cases} \Rightarrow \frac{51}{8{,}9} \leq \frac{S}{B} \leq \frac{52}{7{,}9} \Rightarrow \boxed{5{,}7 \leq h \leq 6{,}6}$$

التمرين الثالث :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert < 3$	$d\left(x;\frac{1}{2}\right) < 3$	$x \in \left]-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right[$	$\boldsymbol{-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}}$
$\lvert x-4\rvert < 1$	$d(x;4) < 1$	$\boldsymbol{x \in]3;5[}$	$3 < x < 5$
$\lvert x-5\rvert \leq 10^{-2}$	$\boldsymbol{d(x;5) \leq 10^{-2}}$	$x \in [4{,}99;5{,}01]$	$4{,}99 \leq x \leq 5{,}01$
$\boldsymbol{\lvert x-3\rvert < 2}$	$d(x;3) < 2$	$x \in]1;5[$	$1 < x < 5$

1. $-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \Rightarrow x \in \left]-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right[$; $c = \frac{-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{2} = \frac{1}{2}$; $r = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$
   $-\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \Rightarrow d\left(x;\frac{1}{2}\right) < 3 \Rightarrow \left\lvert x - \frac{1}{2}\right\rvert < 3$
2. $x \in]3;5[\Rightarrow 3 < x < 5$; $c = \frac{3+5}{2} = 4$; $r = 5-4 = 1$
   $x \in]3;5[\Rightarrow d(x;4) < 1 \Rightarrow \lvert x-4\rvert < 1$
3. $d(x;5) \leq 10^{-2} \Rightarrow \lvert x-5\rvert \leq 10^{-2} \Rightarrow 5-10^{-2} \leq x \leq 5+10^{-2}$
   $d(x;5) \leq 10^{-2} \Rightarrow 4{,}99 \leq x \leq 5{,}01 \Rightarrow x \in [4{,}99;5{,}01]$
4. $\lvert x-3\rvert < 2 \Rightarrow d(x;3) < 2 \Rightarrow 3-2 < x < 3+2$
   $\lvert x-3\rvert < 2 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow x \in]1;5[$.

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

1. **تعيين القيم الممكنة لـ x**

المثلث ABC قائم في A ، إذن حسب نظرية فيثاغورس : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

أي $AC^2 = 9$ ، منه $AC = 3\,cm$. وبما أنّ N نقطة من $[AC]$ ، فإنّ $\boxed{x \in [0;3]}$

2. حساب طول القطعة [NH] بدلالة x

المستقيمان (NH) و (AB) يعامدان المستقيم (BC) ، فهما إذن متوازيان.

حسب نظرية طالس لدينا : $\frac{NH}{AB} = \frac{CN}{CA}$ أي $\frac{NH}{4} = \frac{3-x}{3}$ ومنه : $\boxed{NH = \frac{12-4x}{3}}$

3. التعبير عن مساحة المثلث ABN بدلالة x

$$\mathcal{A}_{ABN} = \frac{AN \times AB}{2} = \frac{4x}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{ABN} = 2x}$$

4. التعبير عن مساحة شبه المنحرف ABHN بدلالة x

$$S_{ABHN} = \frac{(NH + AB) \times AN}{2} = \frac{\left(\frac{12-4x}{3} + 4\right)x}{2} = \frac{\left(\frac{24-4x}{3}\right)x}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{ABHN} = \frac{-4x^2 + 24x}{6}}$$

5. استنتاج مساحة المثلث BHN بدلالة x

$$\mathcal{A}_{BHN} = \mathcal{A}_{ABHN} - \mathcal{A}_{ABN} = \frac{-4x^2 + 24x}{6} - 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_{BHN} = \frac{-4x^2 + 12x}{6}}$$

الجزء الثاني :

نضع الآن $f(x) = \mathcal{A}_{BHN}$ ، حيث A يرمز للمساحة

1. ايجاد دستور $f(x)$، وكتابة $f(x)$ بالشكل $m(x - a)^2 + b$

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 12x}{6} = \boxed{-\frac{2}{3}x^2 + 2x}$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 2x = -\frac{2}{3}(x^2 - 3x) = -\frac{2}{3}\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

2. تعيين قيمة x حتى تكون مساحة المثلث BHN أكبر ما يمكن

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) \leq \frac{3}{2}$$

تبلغ الدالة f قيمتها الحدّية الكبرى $\left(\frac{3}{2}\right)$ لمّا $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$ أي لمّا $\boxed{x = \frac{3}{2}}$

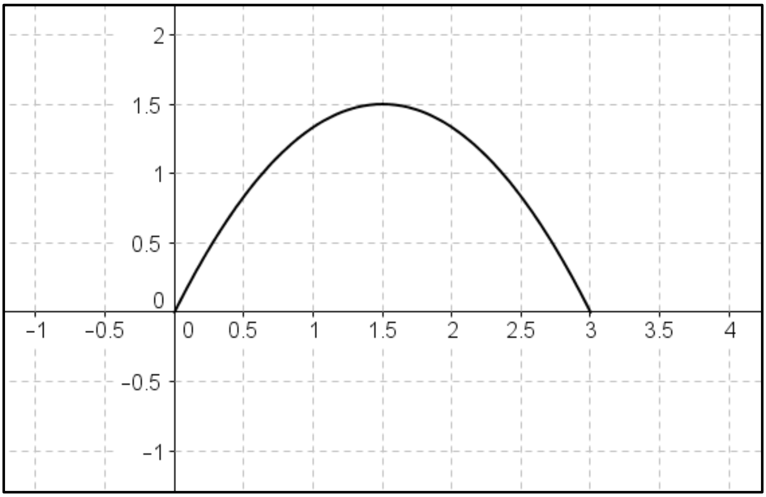
3. حساب $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(1,5)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$

$$f(0) = 0 \,;\, f(1) = \frac{4}{3} \,;\, f(1,5) = 1,5 \,;\, f(2) = \frac{4}{3} \,;\, f(3) = 0$$

4. جدول تغيرات الدالة f

x	0		$\frac{3}{2}$		3
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

5. رسم التمثيل البياني للدالة f



الموضوع السادس

التمرين الأول :

تعيين الإجابة الصحيحة مع التعليل

1. العدد $\sqrt{1-\frac{12}{13}} \times \sqrt{1+\frac{12}{13}}$ هو : ب) ناطق

$$\sqrt{1+\frac{12}{13}} \times \sqrt{1-\frac{12}{13}} = \sqrt{\left(1+\frac{12}{13}\right)\left(1-\frac{12}{13}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169-144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \boxed{\frac{5}{13}}$$

2. الكتابة العلمية للعدد $a \times b$ هي : أ) $2,79 \times 10^5$

$$a \times b = 6,2 \times 10^{-2} \times 4,5 \times 10^6 = 27,9 \times 10^4 = \boxed{2,79 \times 10^5}$$

3. الكتابة المبسّطة للعدد $\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$ هي : ج) $2\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} < 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}-2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \,;\, \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12 \Rightarrow 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3} \Rightarrow 3\sqrt{2}-2\sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow \left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$\left|\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| + \left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

4. الشكل المبسّط للعدد $\dfrac{\frac{1}{5}\left(3-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{5}-\frac{4}{6}}$ هو : ب) $-\frac{27}{4}$

$$\frac{\frac{1}{5}\left(3-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{5}-\frac{4}{6}} = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{12}{4}-\frac{3}{4}\right)}{\frac{18}{30}-\frac{20}{30}} = \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{9}{4}\right)}{-\frac{2}{30}} = \frac{\frac{9}{20}}{-\frac{1}{15}} = \frac{9}{20}(-15) = \boxed{-\frac{27}{4}}$$

التمرين الثاني :

1. اثبات صحة المبرهنة التالية :

إذا كان $a \geq 1$ فإنّ $a^3 \geq a^2 \geq a$ ، حيث a عدد حقيقي

$$a^2 - a = a(a-1)\,;\, a \geq 1 \Rightarrow a(a-1) \geq 0 \Rightarrow a^2 - a \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 \geq a \; ... ①$$

$$a^3 - a^2 = a^2(a-1)\,;\, a \geq 1 \Rightarrow a^2(a-1) \geq 0 \Rightarrow a^3 - a^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^3 \geq a^2 \; ... ②$$

من ① و② نستنتج أنّ : $\boxed{a^3 \geq a^2 \geq a}$

2. x عدد حقيقي و $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$.

أ. تعيين حصر للعدد : $6 - 5x$

$$\frac{4}{5} \leq x \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 5x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq -5x \leq -4 \Rightarrow \boxed{1 \leq 6 - 5x \leq 2}$$

ب. مقارنة الأعداد : $(6-5x)^3$; $(6-5x)^2$; $(6-5x)$

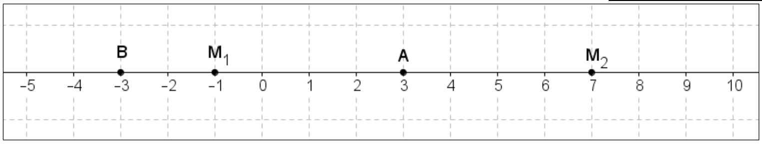
$$6 - 5x \geq 1 \Rightarrow \boxed{(6-5x)^3 \geq (6-5x)^2 \geq (6-5x)}$$

التمرين الثالث :

1. تعيين قيم x بحيث يكون :

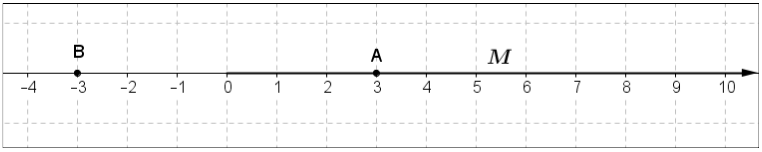
أ. $d(x\,;3) = 4$

$d(x;3) = 4 \Rightarrow MA = 4 \Rightarrow x = 3 - 4$ أو $x = 3 + 4 \Rightarrow$ $\boxed{x = -1}$ أو $\boxed{x = 7}$



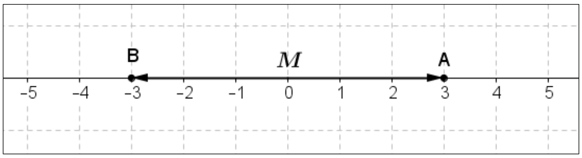
ب. $|x-3| \leq |x+3|$

$$|x-3| \leq |x+3| \Rightarrow d(x;3) \leq d(x;-3) \Rightarrow MA \leq MB \Rightarrow \boxed{x \in [0;+\infty[}$$

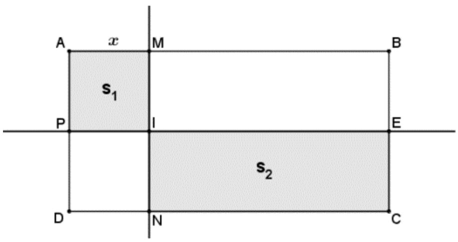


2. تعيين موضع النقطة M وقيم x بحيث يكون : $MA + MB = 6$

$$MA + MB = 6 \Rightarrow d(x;3) + d(x;-3) = 6 \Rightarrow M \in [AB] \Rightarrow x \in [-3;3]$$



التمرين الرابع :



1. **تعيين قيم x**

بما أنّ M نقطة من [AB] ، فإنّ $x \in [0;8]$

2. **تعيين طبيعة الرباعي IECN**

بما أنّ الرباعي $AMIP$ مربّع ، فإنّ $(PI) \parallel (AM)$ ، $(MI) \parallel (AP)$

و $(PI) \perp (AP)$ ، إذن $(NC) \parallel (IE)$ ، $(EC) \parallel (IN)$ و $(NC) \perp (IN)$ ،

ومنه نستنتج أنّ الرباعي $IECN$ مستطيل

3. $\boldsymbol{S_1 = x^2}$ ، $\boldsymbol{S_2 = (8-x)(4-x) = x^2 - 12x + 32}$

أ. **تعيين قيم x بحيث : $S_1 = S_2$**

$S_1 = S_2$ يعني $x^2 = x^2 - 12x + 32$ أي $12x = 32$ ومنه $\boxed{x = \frac{8}{3}}$

ب. **تعيين قيم x بحيث تكون $S_2 > S_1$**

$S_2 > S_1$ يعني $x^2 - 12x + 32 > x^2$ أي $12x < 32$ ومنه $\boxed{x < \frac{8}{3}}$

الموضوع السابع

التمرين الأول :

1. **مقارنة العددين $3\sqrt{3}$ و $2\sqrt{7}$**

$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27\ ;\ \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 28\ ;\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 < \left(2\sqrt{7}\right)^2 \Rightarrow \boxed{3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}}$$

2. **حساب $\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2$**

$$\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{7}\right)$$
$$= 27 + 28 - 12\sqrt{21} = \boxed{55 - 12\sqrt{21}}$$

3. **استنتاج كتابة مبسطة للعدد x**

$$x = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2} = \left|\underbrace{3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}_{\text{عدد سالب}}\right| = \boxed{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}$$

4. **تعيين حصر للعدد x علما أنّ: $2,7 > \sqrt{7} > 2,6$ وَ $1,8 > \sqrt{3} > 1,7$**

$$\begin{cases} 2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7 \\ 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5{,}2 < 2\sqrt{7} < 5{,}4 \\ 5{,}1 < 3\sqrt{3} < 5{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5{,}2 < 2\sqrt{7} < 5{,}4 \\ -5{,}4 < -3\sqrt{3} < -5{,}1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow -0{,}2 < 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} < 0{,}3 \Rightarrow \boxed{-0{,}2 < x < 0{,}3}$$

التمرين الثاني :

1. **حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين :**

أ. $|x - 5| = 3$

$|x - 5| = 3 \Rightarrow x - 5 = -3$ أو $x - 5 = 3 \Rightarrow x = 2$ أو $x = 8 \Rightarrow \boxed{S = \{2; 8\}}$

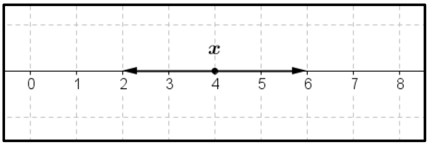
ب. $|x - 3| = |x + 1|$

$$|x - 3| = |x + 1| \Rightarrow \begin{array}{c} x - 3 = x + 1 \\ \text{أو} \\ x - 3 = -x - 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -3 = 1 \ \text{... مستحيل} \\ \text{أو} \\ 2x = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{S = \{1\}}$$

2. **باستعمال المسافات حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين :**

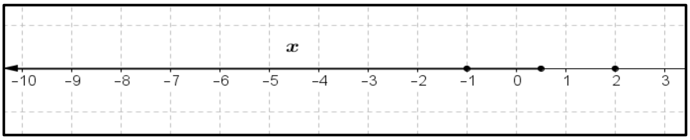
أ. $|x - 4| < 2$

$|x - 4| < 2 \Rightarrow d(x; 4) < 2 \Rightarrow 4 - 2 < x < 4 + 2 \Rightarrow \boxed{S =]2; 6[}$



ب. $|x + 1| \leq |x - 2|$

$$|x+1| \leq |x-2| \Rightarrow d(x;-1) \leq d(x;2) \Rightarrow \boxed{S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]}$$



التمرين الثالث :

g دالة معرفة على المجال [1 ; 3-] حيث : $g(x) = x^2 + 2x - 3$

1. التحقق أن : $g(x) = (x+1)^2 - 4$

$$(x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x + 3 = g(x)$$

2. تعيين سابقة العدد 0

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 4$$

$\Rightarrow x + 1 = -2$ أو $x + 1 = 2 \Rightarrow x = -3$ أو $x = 1$

للعدد 0 سابقتان هما -3 و 1.

3. بيان أنّ الدالة g متناقصة على المجال [1- ; 3-] و متزايدة على المجال [1 ; 1-]

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $[-3;-1]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$x_1 < x_2 \leq -1 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \leq 0 \Rightarrow (x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$$
$$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 4 > (x_2+1)^2 - 4 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

منه، الدالة g متناقصة على المجال $[-3;-1]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $[-1;1]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$-1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_1+1)^2 < (x_2+1)^2$$
$$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 4 < (x_2+1)^2 - 4 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

منه، الدالة g متزايدة على المجال $[-1;1]$.

استنتاج جدول تغيرات الدالة g

x	-3		-1		1
$g(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0

4. تعيين القيمة الحدية الصغرى

$$(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 4 \geq -4 \Rightarrow g(x) \geq -4$$

منه، نستنتج أنّ القيمة الحدّية الصغرى للدالة g هي $\boxed{-4}$.

التمرين الرابع :

.1 تعيين المجال الذي ينتمي إليه x

بما أنّ النقطة M تنتمي إلى القطعة $[AB]$ ، فإنّ $\boxed{x \in [0;8]}$

.2 كتابة عبارة $f(x)$ بدلالة x

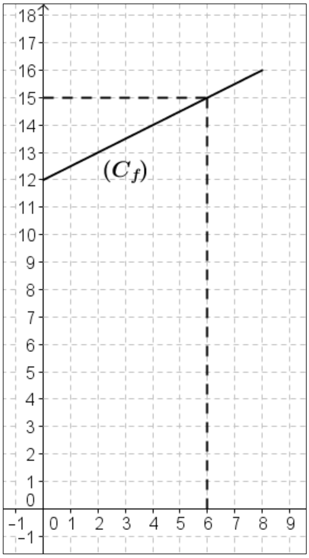
لدينا : $f(x) = 2(AM + MN)$

وبما أنّ المستقيمين (Δ) و (AC) متوازيان ، فإنّ $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA}$ (نظرية طاليس) ،

ومنه $MN = \frac{BM \times AC}{BA} = \frac{6(8-x)}{8}$ أي $MN = 6 - \frac{3}{4}x$ ، ومنه :

$$f(x) = 2\left(x + 6 - \frac{3}{4}x\right) = 2\left(\frac{1}{4}x + 6\right) = \boxed{\frac{1}{2}x + 12}$$

.3 رسم منحنى الدالة f



.4 تحديد بيانيا القيمة التقريبية للعدد x التي من أجلها تكون $f(x) = 15$

نلاحظ من البيان أنّ القيمة التي من أجلها تكون $f(x) = 15$ هي $\boxed{x = 6}$

التحقق من النتيجة حسابيا

$f(x) = 15$ يعني $\frac{1}{2}x + 12 = 15$ أي $\frac{1}{2}x = 3$

ومنه $\boxed{x = 6}$

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

أجب بصحيح أو خطا على الجمل التالية مع التعليل:

1. العدد $\left(\sqrt{7}+3\right)^2-6\sqrt{7}$ عدد صحيح : صحيح

$$\left(\sqrt{7}+3\right)^2-6\sqrt{7}=7+9+6\sqrt{7}-6\sqrt{7}=\boxed{16}$$

2. إذا كان $x<2$ فإن $x^2<4$: خطأ

$-3<2$ و $(-3)^2>4$

3. إذا كان $1,5<a<1,6$ فإن $1,25<a^2-1<1,56$: صحيح

$$1,5<a<1,6 \Rightarrow 2,25<a^2<2,56 \Rightarrow \boxed{1,25<a^2-1<1,56}$$

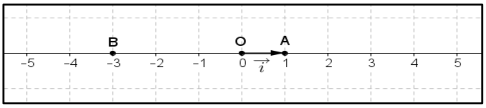
4. **من أجل كل عدد حقيقي x يكون $x^2>x$: خطأ**

من أجل $x\in[0;1]$ يكون $x^2\le x$. مثال : $(0,1)^2<0,1$.

التمرين الثاني:

المستقيم (d) مزوّد بمعلم خطي $(O,\vec{i})$، M نقطة من المستقيم (d) فاصلتها x و A ، B نقطتان من (d) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3-.

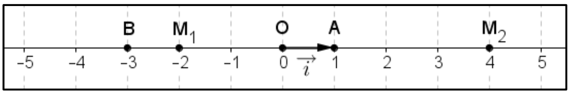
3. تمثيل النقطتين A وB في المعلم $(O,\vec{i})$



4. تعيين قيم العدد الحقيقي x في كل ما يلي باستعمال المسافة :

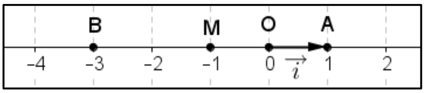
د. $|x-1|=3$

$$|x-1|=3 \Rightarrow d(x;1)=3 \Rightarrow AM=3 \Rightarrow \boxed{x=4 \text{ أو } x=-2}$$



ه. $|x-1|=|x+3|$

$$|x-1|=|x+3| \Rightarrow d(x;1)=d(x;-3) \Rightarrow MA=MB \Rightarrow \boxed{x=-1}$$



و. $|x-1|\le|x+3|$

$$|x-1|\le|x+3| \Rightarrow d(x;1)\le d(x;-3) \Rightarrow MA\le MB \Rightarrow \boxed{x\in[-1;+\infty[}$$

التمرين الثالث:

الجزء الأول: بقراءة بيانية:

1. **تعيين صور الأعداد 1 ، 3 و 0**

$f(1) = \boxed{-1}\ ; f(3) = \boxed{3}\ ;\ \ f(0) = \boxed{0}$

2. **تعيين حلول المعادلة $f(x) = 3$**

$f(x) = 3 \Rightarrow$ $\boxed{x = 3 \text{ أو } x = -1}$

3. **تعيين إشارة $f(x)$**

- $x \in \,]-\infty; 0[\, \cup \,]2; +\infty[\ : g(x) > 0$
- $x \in \,]0; 2[\ : g(x) < 0$
- $x \in \{0; 2\} : g(x) = 0$

4. **جدول تغيرات الدالة f**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

الجزء الثاني: $h(x) = x^2 - 2|x|$

1. **اثبات أنّ h دالة زوجية**

D_h متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_h$ لدينا :

$h(-x) = (-x)^2 - 2|-x| = x^2 - 2|x| = h(x)$

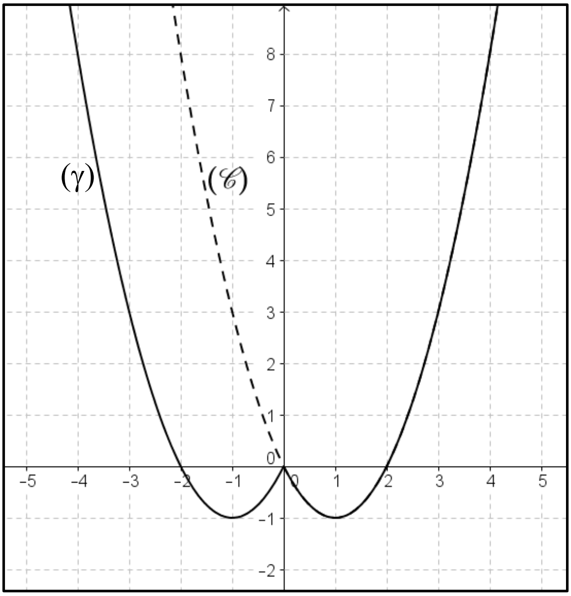
منه، نستنتج أنّ h دالة زوجية وأنّ المنحنى (γ) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

2. **اثبات أنّ $h(x) = f(x)$ على مجال يطلب تعيينه**

من أجل $x \geq 0$ لدينا $|x| = x$ ، منه $h(x) = f(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

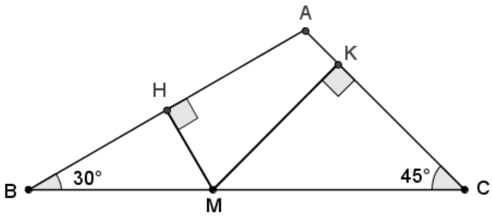
3. **رسم المنحنى (γ) مستعينا بالمنحنى $(\mathscr{C})$**

على المجال $[0; +\infty[$ لدينا $h(x) = f(x)$ ، منه المنحنى (γ) ينطبق على المنحنى $(\mathscr{C})$ ، و على المجال $]-\infty; 0]$ نرسم المنحنى (γ) بالتناظر المحوري.



التمرين الرابع:

1. **رسم المثلث ABC**



2. **اثبات أنّ: $g(x) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}x + 4\sqrt{2}$**

في المثلث BMH لدينا :

$\sin\hat{B} = \frac{MH}{MB}$ ، أي $MH = MB \times \sin\hat{B}$ ومنه : $\boxed{MH = \frac{1}{2}x}$

في المثلث CMK لدينا :

$\sin\hat{C} = \frac{MK}{MC}$ ، أي $MK = MC \times \sin\hat{C}$ ومنه : $\boxed{MK = \frac{\sqrt{2}}{2}(8-x)}$

$$g(x) = MH + MK = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}(8-x) = \boxed{\frac{1-\sqrt{2}}{2}x + 4\sqrt{2}}$$

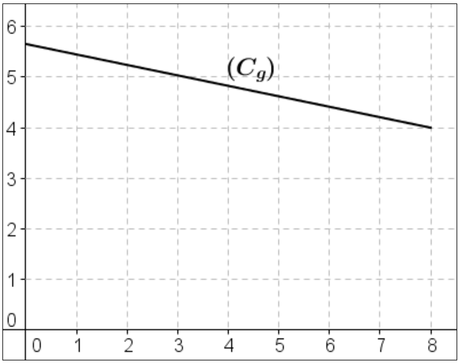
3. **رسم المنحنى الممثل للدالة g**

4. **حلّ المعادلة : $g(x) = 3\sqrt{2}$**

$g(x) = 3\sqrt{2}$ يعني : $\frac{1-\sqrt{2}}{2}x + 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ، أي : $\frac{1-\sqrt{2}}{2}x = -\sqrt{2}$ ،

وبالتالي : $(1-\sqrt{2})x = -2\sqrt{2}$ ، ومنه : $x = \frac{-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(-2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$ ،

إذن : $x = (2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$ ، ومنه : $\boxed{x = 4 + 2\sqrt{2}}$



الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. نشر و تبسيط العبارة E حيث : $E=\left(2-3\sqrt{2}\right)^2$

$$E=\left(2-3\sqrt{2}\right)^2=4+18-12\sqrt{2}=\boxed{22-12\sqrt{2}}$$

استنتاج تبسيط للعدد $\sqrt{22-12\sqrt{2}}$

$$\sqrt{22-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(2-3\sqrt{2}\right)^2}=\left|\underbrace{2-3\sqrt{2}}_{\text{عدد سالب}}\right|=\boxed{3\sqrt{2}-2}$$

2. بيان أنّ : $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2=4$

$$\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$$

$$=7-2\sqrt{6}+7+2\sqrt{6}-2\sqrt{7-2\sqrt{6}}\times\sqrt{7+2\sqrt{6}}$$

$$=14-2\sqrt{\left(7-2\sqrt{6}\right)\left(7+2\sqrt{6}\right)}$$

$$=14-2\sqrt{(7)^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=14-2\sqrt{49-24}$$

$$=14-2\sqrt{25}=14-10=\boxed{4}$$

استنتاج قيمة العدد $\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

$$7-2\sqrt{6}<7+2\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{7-2\sqrt{6}}<\sqrt{7+2\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}<0$$

$$\Rightarrow\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{7+2\sqrt{6}}=-\sqrt{4}=\boxed{-2}$$

3. بيان أنّ $x=9$ **وَ** $y=\frac{5}{2}$

$$x=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-3^{-1}\right]^{-1}=\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{9}-\frac{3}{9}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\Rightarrow\boxed{x=9}$$

$$y=\frac{2^7\times5^{-2}\times10^{-4}}{5^{-7}\times4^2}=\frac{2^7\times5^{-2}\times2^{-4}\times5^{-4}}{5^{-7}\times2^4}=2^{-1}\times5\Rightarrow\boxed{y=\frac{5}{2}}$$

التمرين الثاني :

$$\boldsymbol{4,3 \leq r \leq 4,4} \text{ ، } \boldsymbol{3,14 \leq \pi \leq 3,15} \text{ ، } \boldsymbol{50,8 \leq h \leq 50,9}$$

1. تعيين حصر لمساحة القاعدة $\mathcal{B}$

$$\begin{cases} 3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15 \\ 4{,}3 \leq r \leq 4{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15 \\ 18{,}49 \leq r^2 \leq 19{,}36 \end{cases} \underset{\mathcal{B}=\pi r^2}{\Longrightarrow} \boxed{58{,}06 \leq \mathcal{B} \leq 60{,}98}$$

2. تعيين حصر لحجم البئر $\mathcal{V}$

$$\begin{cases} 58{,}06 \leq \mathcal{B} \leq 60{,}98 \\ 50{,}8 \leq h \leq 50{,}9 \end{cases} \underset{\mathcal{V}=\mathcal{B}\times h}{\Longrightarrow} \boxed{2949.45 \leq \mathcal{V} \leq 3103{,}88}$$

3. تعيين حصر لحجم الماء

$$2949.45 \leq \mathcal{V} \leq 3103{,}88 \Rightarrow \boxed{2212{,}09 \leq \frac{3}{4}\mathcal{V} \leq 2327{,}91}$$

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x^2+1}}$

1. دراسة شفعية الدالة f

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = \frac{4}{(-x)^2+1} = \frac{4}{x^2+1} = f(x)$

منه ، نستنتج أنّ الدالة f زوجية.

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[0; +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2 + 1} > \frac{1}{x_2^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x_1^2 + 1} > \frac{4}{x_2^2 + 1} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $[0; +\infty[$.

استنتاج جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

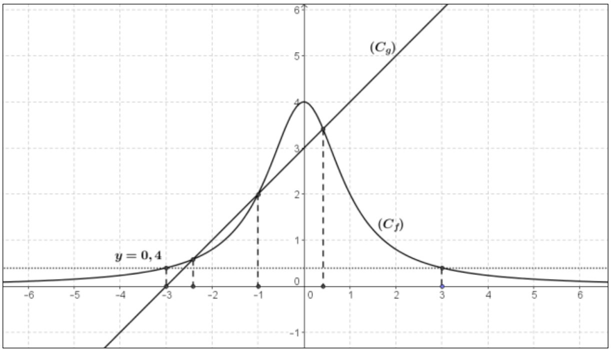
بما أنّ الدالة f زوجية ومتناقصة على المجال $[0; +\infty[$ ، فهي متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

3. جدول لبعض قيم f

x	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
$f(x)$	1	2	4	2	1

انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$



4. $g(x) = x + 3$

أ. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في نفس المعلم السابق

ب. حلّ بيانيا المعادلات و المتراجحة التالية :

$f(x) = g(x) \Rightarrow \boxed{x_1 \approx -2{,}4\,;\, x_2 = -1\,;\, x_3 = 0{,}4}$

$f(x) = 0{,}4 \Rightarrow \boxed{x_1 = -3\,;\, x_2 = 3}$

$g(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}$

$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \boxed{x \in\,]-\infty; -2{,}4] \cup [-1; 0{,}4]}$

التمرين الرابع :

1. اكمال الجدول التالي :

I	J	$I \cap J$	$I \cup J$
$[2; 6]$	$[5; 10]$	$[5; 6]$	$[2; 10]$
$]-\infty; -3[\, \cup\,]3; +\infty[$	$]-1; 1[$	$\emptyset$	$]-\infty; -3[\, \cup\,]-1; 1[\, \cup\,]3; +\infty[$
$]-\infty; 0[$	$]-5; +\infty[$	$]-5; 0[$	$]-\infty; +\infty[$

2. وضع مكان الفراغ أحد الرمزين $>$ أو $<$:

$x < y \Rightarrow y > x \Rightarrow \boxed{y - 7 > x - 7}$

$x < y \Rightarrow y > x \Rightarrow -2y < -2x \Rightarrow \boxed{-2y - 9 < -2x - 9}$

$x < y \Rightarrow 2x < 2y \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2x} > \frac{1}{2y}}$

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

1. تبسيط العدد الحقيقي A

$$A=2+\frac{(12a^2b^3)^{-1}\left(\sqrt{3}ab\right)^3}{0,25\ a}=2+\frac{12^{-1}a^{-2}b^{-3}\times 3\sqrt{3}a^3b^3}{\frac{1}{4}\ a}$$

$$A=2+\frac{4\times 3\sqrt{3}a}{12\ a}=2+\frac{12\sqrt{3}a}{12\ a}\Rightarrow \boxed{A=2+\sqrt{3}}$$

2. $\boldsymbol{B=2+3\sqrt{48}-2\sqrt{27}-\sqrt{147}}$

أ. بيان أنّ $\boldsymbol{B=2-\sqrt{3}}$

$$B=2+3\sqrt{16\times 3}-2\sqrt{9\times 3}-\sqrt{49\times 3}=2+12\sqrt{3}-6\sqrt{3}-7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{B=2-\sqrt{3}}$$

ب. حساب الجداء $\boldsymbol{A\times B}$

$$A\times B=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=4-3\Rightarrow \boxed{A\times B=1}$$

$$A\times B=1\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{B}\ \text{و}\ B=\frac{1}{A}}$$

ج. استنتاج قيمة $\boldsymbol{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}}$

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=B-A=\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)=\boxed{-2\sqrt{3}}$$

3. $\boldsymbol{C=|5-2\pi|+\left|2-\sqrt{3}\right|+\left|2+\sqrt{3}\right|-\pi}$

كتابة العدد الحقيقي C بدون رمز القيمة المطلقة وتبسيطه

$$\begin{cases}5<2\pi\Rightarrow 5-2\pi<0\\ 2>\sqrt{3}\Rightarrow 2-\sqrt{3}>0\end{cases}\Rightarrow C=-5+2\pi+2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\pi-1}$$

التمرين الثاني :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر
$\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert\le\frac{3}{2}$	$d\left(x;\frac{1}{2}\right)\le\frac{3}{2}$	$x\in[-1;2]$	$\boldsymbol{-1\le x\le 2}$
$\lvert x-2\rvert<1$	$d(x;2)<1$	$\boldsymbol{x\in]1;3[}$	$1<x<3$
$\lvert x-1\rvert\le 4$	$\boldsymbol{d(x;1)\le 4}$	$x\in[-3;5]$	$-3\le x\le 5$
$\boldsymbol{\lvert x+5\rvert<3}$	$d(x;-5)<3$	$x\in]-8;-2[$	$-8<x<-2$

1. $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in [-1;2]\,;\, c = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}\,;\, r = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow d\left(x;\frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}$

2. $x \in\,]1;3[\, \Rightarrow 1 < x < 3\,;\, c = \frac{1+3}{2} = 2\,;\, r = 3 - 2 = 1$

$x \in\,]1;3[\, \Rightarrow d(x;2) < 1 \Rightarrow |x-2| < 1$

3. $d(x;1) \leq 4 \Rightarrow |x-1| \leq 4 \Rightarrow 1 - 4 \leq x \leq 1 + 4$

$d(x;1) \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [-3;5]$

4. $|x+5| < 3 \Rightarrow d(x;-5) < 3 \Rightarrow -5 - 3 < x < -5 + 3$

$|x+5| < 3 \Rightarrow -8 < x < -2 \Rightarrow x \in\,]-8;-2[.$

التمرين الثالث :

$\boldsymbol{b = 2\sqrt{7}}$ و $\boldsymbol{a = 3\sqrt{3}}$

1. بيان أنّ : $\boldsymbol{a - b = -\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}}}$

$$a - b = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{7} = \frac{(3\sqrt{3}-2\sqrt{7})(3\sqrt{3}+2\sqrt{7})}{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}} = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2}{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$$

$$= \frac{27-28}{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}} = \boxed{-\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}}}$$

استنتاج مقارنة بين العددين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$

$$a - b < 0 \Rightarrow \boxed{a < b}$$

2. تبسيط العدد $\boldsymbol{\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2}$

$$\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 - 2\left(3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{7}\right)$$

$$= 27 + 28 - 12\sqrt{21} = \boxed{55 - 12\sqrt{21}}$$

3. استنتاج كتابة مبسّطة للعدد $\boldsymbol{x}$

$$x = \sqrt{55 - 12\sqrt{21}} = \sqrt{\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right)^2} = \left|3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}\right|$$

$$\boxed{x = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{7}}$$

4. تعيين حصر للعدد $\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} 1,7 \leq \sqrt{3} \leq 1,8 \\ 2,6 \leq \sqrt{7} \leq 2,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5,4 \leq -3\sqrt{3} \leq -5,1 \\ 5,2 \leq 2\sqrt{7} \leq 5,4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-0,2 \leq x \leq 0,3}$$

التمرين الرابع :

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in]-\infty; -3] \cup \{0\} \cup [3; +\infty[}$

$g(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[}$

$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \boxed{x \in [0; 2{,}5]}$

2. استنتاج جدول الإشارة للدوال f ، g و $f-g$

جدول إشارة الدالة f

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

جدول إشارة الدالة g

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$		−	0	+	0	−	

جدول إشارة الدالة $f-g$

x	$-\infty$		0		$2{,}5$		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		+	0	−	0	+	

3. المناقشة البيانية حسب قيّم m لعدد حلول المعادلتين : $f(x) = m$ وَ $g(x) = m$

لحل المعادلة $f(x) = m$ ، ندرس تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لحامل محور الفواصل :

- من أجل $m < -1$: ليس للمعادلة حلول
- من أجل $m = -1$: تقبل المعادلة حلين
- من أجل $-1 < m < 0$: تقبل المعادلة 4 حلول
- من أجل $m = 0$: تقبل المعادلة 3 حلول
- من أجل $m > 0$: تقبل المعادلة حلين

لحل المعادلة $g(x) = m$ ، ندرس تقاطع المنحنى (C_g) مع المستقيمات الموازية لحامل محور الفواصل :

- من أجل $m < 1$: تقبل المعادلة حلين
- من أجل $m = 1$: تقبل المعادلة حلا وحيدا
- من أجل $m > 1$: ليس للمعادلة حلول.

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

1. **هل العدد 379 أولي؟**

لدينا $\sqrt{379} \approx 19{,}47$ وبما أنّ العدد 379 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من 19,47 $(2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19)$ فهو إذن أولي.

2. **تحليل العددين 1782 و 999 إلى جداء عوامل أولية.**

$$\boxed{1782 = 2 \times 3^4 \times 11\ ;\ 999 = 3^3 \times 37}$$

3. **استنتاج $\boldsymbol{PGCD(1782;999)}$ و $\boldsymbol{PPCM(1782;999)}$.**

$$PGCD(1782;999) = 3^3 = \boxed{27}$$

$$PPCM(1782;999) = 2 \times 3^4 \times 11 \times 37 = \boxed{65934}$$

4. $\boldsymbol{A = 1,783783\ldots}$.

أ. **تحديد طبيعة العدد A وتعيين الكتابة الكسرية له.**

بما أنّ الجزء العشري للعدد A غير منته فهو ناطق.

$$A = 1{,}783783\ldots = 1 + 0{,}783783\ldots$$

$$x = 0{,}783783\ldots \Rightarrow 1000x = 783{,}783\ldots = 783 + x \Rightarrow 999x = 783$$

$$\Rightarrow x = \frac{783}{999}$$

$$A = 1 + x = 1 + \frac{783}{999} = \boxed{\frac{1782}{999}}$$

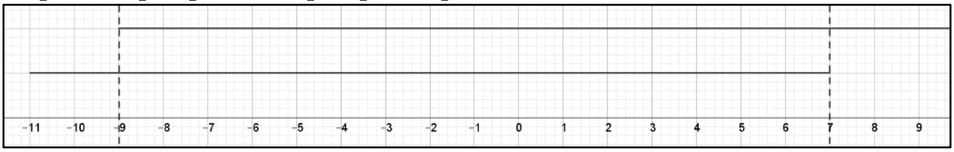
ب. **استنتاج الشكل غير قابل للاختزال للعدد $\boldsymbol{A}$.**

$$A = \frac{1782}{999} = \frac{1782:27}{999:27} = \boxed{\frac{66}{37}}$$

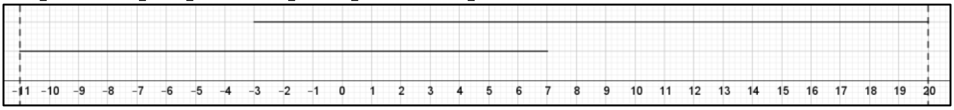
التمرين الثاني :

1. **تعيين المجالات التالية:**

① $[-11;7] \cap [-9;+\infty[= [-9;7]$



② $[-11;7] \cup]-3;20] = [-11;20]$



③ $([5;7] \cup [-4;+\infty[) \cap]-3;20] = [-4;+\infty[\cap]-3;20] =]-3;20]$

.2 $2 \le a \le 3$ و $-4 \le b \le -3$

حصر الأعداد التالية: $3a$ ، b^2 ، $3a+b^2$ ، $-2b$ ، $a-2b$ ، $\frac{1}{a-2b}$.

$2 \le a \le 3 \Rightarrow 3(2) \le 3a \le 3(3) \Rightarrow \boxed{6 \le 3a \le 9}$

$-4 \le b \le -3 \xrightarrow[\text{تربيع عددين سالبين}]{} (-3)^2 \le b^2 \le (-4)^2 \Rightarrow \boxed{9 \le b^2 \le 16}$

$\begin{cases} 6 \le 3a \le 9 \\ 9 \le b^2 \le 16 \end{cases} \Rightarrow \boxed{15 \le 3a + b^2 \le 25}$

$-4 \le b \le -3 \xrightarrow[\text{ضرب في عدد سالب}]{} -2(-3) \le -2b \le -2(-4)$

$\Rightarrow \boxed{6 \le -2b \le 8}$

$\begin{cases} 2 \le a \le 3 \\ 6 \le -2b \le 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{8 \le a - 2b \le 11}$

$8 \le a - 2b \le 11 \xrightarrow[\text{القلب}]{} \boxed{\frac{1}{11} \le \frac{1}{a-2b} \le \frac{1}{8}}$

التمرين الثالث :

$P(x) = |x+1| - 2$ و $Q(x) = |x-4| + 2$

.1 **حساب** $P\left(\frac{1}{3}\right)$ ، $Q(\sqrt{3}+2)$.

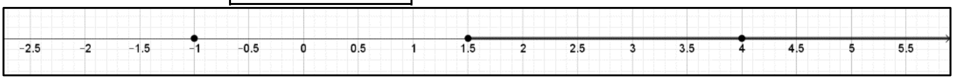
$P\left(\frac{1}{3}\right) = \left|\frac{1}{3}+1\right| - 2 = \left|\frac{4}{3}\right| - 2 = \frac{4}{3} - 2 = \boxed{-\frac{2}{3}}$

$Q(\sqrt{3}+2) = \left|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{<0}\right| + 2 = -\sqrt{3} + 2 + 2 = \boxed{-\sqrt{3}+4}$

.2 **حل المتراجحة** $Q(x) - 2 \le P(x) + 2$.

$Q(x) - 2 \le P(x) + 2 \Rightarrow |x-4| \le |x+1| \Rightarrow d(x;4) \le d(x;-1)$

$\Rightarrow \boxed{x \in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[}$



.3 $A(x) = P(x) + Q(x)$

أ. **كتابة** $A(x)$ **دون رمز القيمة المطلقة.**

$A(x) = P(x) + Q(x) = |x+1| + |x-4|$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\|x+1\|$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\|x-4\|$		$-x+4$		$-x+4$	0	$x-4$	
$\|x+1\|+\|x-4\|$		$-2x+3$	5	5	5	$2x-3$	

$$\boxed{A(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<-1\\ 5, & -1\le x\le 4\\ 2x-3, & x>4\end{cases}}$$

ب. حل المعادلة $A(x)=12$.

$$x<-1: -2x+3=12 \Rightarrow -2x=9 \Rightarrow x=-\frac{9}{2} \Rightarrow S_1=\left\{-\frac{9}{2}\right\}$$

$$x>4: 2x-3=12 \Rightarrow 2x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{2} \Rightarrow S_2=\left\{\frac{15}{2}\right\}$$

$$\boxed{S=S_1\cup S_2=\left\{-\frac{9}{2};\frac{15}{2}\right\}}$$

لاحظ أنّ المعادلة $A(x)=12$ ليس لها حلول على المجال $[-1;4]$ لأنّ $12\neq 5$.

التمرين الرابع :

1. **تعيين مجموعة تعريف الدالة f.**

$D_f=[-4;5]$

2. **تحديد اتجاه تغيّر الدالة f.**

الدالة f متناقصة على المجال $[-4;0]\cup[3;5]$ ومتزايدة على المجال $[0;3]$

3. **ذكر القيم الحدّية المحلية للدالة f.**

تقبل الدالة f قيمة حدّية محلية صغرى عند (0) تساوي (-2) وقيمة حدّية محلية كبرى عند (3) تساوي (2)

4. **حل في المجال $[-4;5]$ المعادلة $f(x)=0$.**

$f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ أو $x=1 \Rightarrow \boxed{S=\{-1;1\}}$

5. **تحديد إشارة الدالة f على المجال $[-4;5]$.**

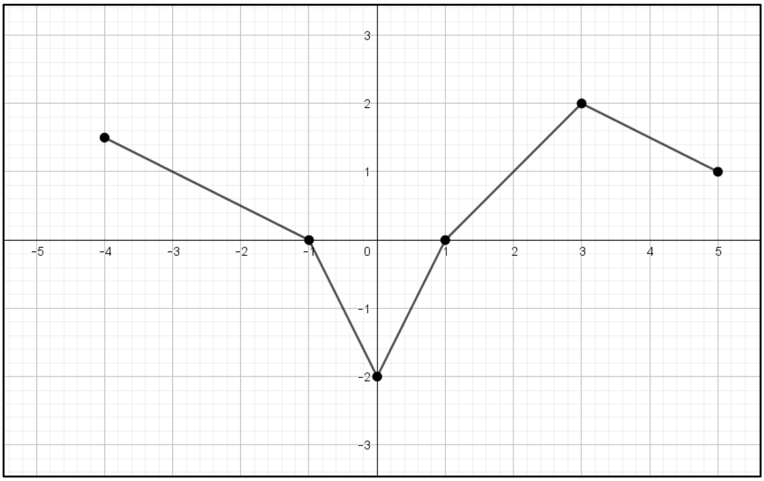
الدالة f موجبة على المجال $[-4;-1]\cup[1;5]$ وسالبة على المجال $[-1;1]$

6. **مقارنة العددين $f(-3)$ ، $f(-2)$ والعددين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ، $f(2)$ مع التعليل.**

7. بما أنّ $-3<-2$ و f متناقصة على المجال $[-3;-2]$ فإنّ $\boxed{f(-3)>f(-2)}$

بما أنّ $\frac{1}{2}<2$ و f متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{2};2\right]$ فإنّ $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)<f(2)}$

8. رسم المنحنى البياني للدالة f على المجال $[-4;5]$.



9. تحديد شفعية الدالة f.

الدالة f ليست فردية ولا زوجية لأنّ مجموعة تعريفها ليست متناظرة بالنسبة إلى 0 كما أنّ منحناها البياني غير متناظر بالنسبة للمبدأ ولا بالنسبة لمحور التراتيب.

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

.1 $\left|a-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}$ و $2<b<3$

أ. بيان أنّ : $1<a<2$.

$$\left|a-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<a-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{1<a<2}$$

ب. حصر الأعداد: ab ، a^2+b^2 ، $\frac{ab}{a^2+b^2}$.

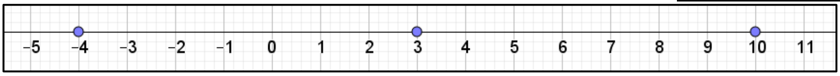
$$\begin{cases}1<a<2\\2<b<3\end{cases}\Rightarrow \boxed{2<ab<6}$$

$$\begin{cases}1<a<2\\2<b<3\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}1<a^2<4\\4<b^2<9\end{cases}\Rightarrow \boxed{5<a^2+b^2<13}$$

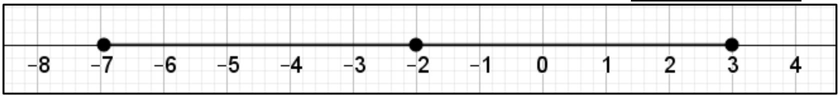
$$\begin{cases}2<ab<6\\5<a^2+b^2<13\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}2<ab<6\\\frac{1}{13}<\frac{1}{a^2+b^2}<\frac{1}{5}\end{cases}\Rightarrow \boxed{\frac{2}{13}<\frac{ab}{a^2+b^2}<\frac{6}{5}}$$

.2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية:

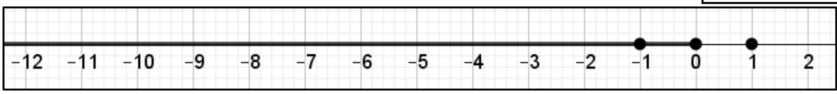
$$|x-3|=7\Rightarrow d(x;3)=7\Rightarrow x=-4 \text{ أو } x=10\Rightarrow \boxed{S=\{-4;10\}}$$



$$|x+2|\leq 5\Rightarrow d(x;-2)\leq 5\Rightarrow -7\leq x\leq 3\Rightarrow \boxed{S=[-7;3]}$$



$$|x+1|\leq|x-1|\Rightarrow d(x;-1)\leq d(x;1)\Rightarrow x\leq 0\Rightarrow \boxed{S=]-\infty;0]}$$



.3 نعتبر في $\mathbb{R}$ المجموعات التالية:

$$I=\{x\in\mathbb{R};|x-1|\leq|x-2|\}$$

$$J=\{x\in\mathbb{R};-3<x<5 \text{ و } 2<x<8\}$$

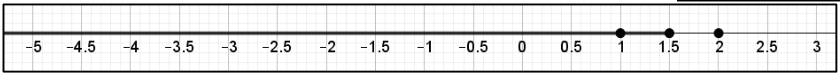
$$L=\left\{x\in\mathbb{R}-\{4\};-1\leq\frac{2x-3}{4-x}\leq 3\right\}$$

أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 4 فإنّ: $\frac{2x-3}{4-x}=-2+\frac{5}{4-x}$

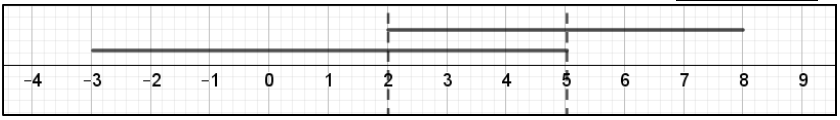
$$-2+\frac{5}{4-x}=\frac{-2(4-x)+5}{4-x}=\frac{-8+2x+5}{4-x}=\boxed{\frac{2x-3}{4-x}}$$

ب. كتابة المجموعات I ، J و L على شكل مجالات.

$$|x-1| \leq |x-2| \Rightarrow d(x;1) \leq d(x;2) \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{I = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]}$$



$-3 < x < 5$ و $2 < x < 8 \Rightarrow x \in]-3;5[\cap]2;8[\Rightarrow \boxed{J =]2;5[}$



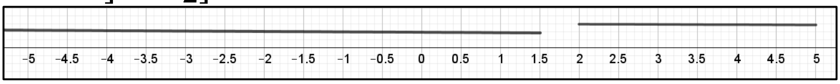
$$-1 \leq \frac{2x-3}{4-x} \leq 3 \Rightarrow -1 \leq -2 + \frac{5}{4-x} \leq 3 \xRightarrow[\text{إضافة 2}]{} 1 \leq \frac{5}{4-x} \leq 5$$

$$\xRightarrow[\text{القسمة على 5}]{} \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4-x} \leq 1 \xRightarrow[\text{قلب الكسر}]{} 1 \leq 4-x \leq 5 \xRightarrow[\text{إضافة } -4]{} -3 \leq -x \leq 1$$

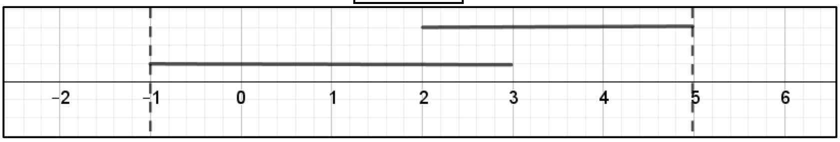
$$\xRightarrow[\text{الضرب في } -1]{} -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \boxed{L = [-1;3]}$$

ج. تعيين: $I \cap J$ و $L \cup J$.

$$I \cap J = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cap]2;5[= \boxed{\emptyset}$$



$$L \cup J = [-1;3] \cup]2;5[= \boxed{[-1;5[}$$



التمرين الثاني :

القيمة المطلقة	المسافة	المجال	الحصر	نصف القطر	المركز
$\lvert x-0,8\rvert \leq 1,6$	$d(x;0,8) \leq 1,6$	$x \in [-0,8;2,4]$	$-0,8 \leq x \leq 2,4$	$1,6$	$0,8$
$\lvert x-1\rvert < 3$	$d(x;1) < 3$	$x \in]-2;4[$	$-5 < 2x-1 < 7$	3	1
$\lvert x-1,1\rvert \leq 0,2$	$d(x;1,1) \leq 0,2$	$x \in [0,9;1,3]$	$0,9 \leq x \leq 1,3$	$0,2$	$1,1$
$\lvert 2x-6\rvert < 4$	$d(x;3) < 2$	$x \in]1;5[$	$1 < x < 5$	2	3
$\left\lvert x-\frac{4}{5}\right\rvert \leq \frac{1}{5}$	$d\left(x;\frac{4}{5}\right) \leq \frac{1}{5}$	$x \in \left[\frac{3}{5};1\right]$	$\frac{3}{5} \leq x \leq 1$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

ملاحظة: يمكن الإجابة على السؤال الثالث كما يلي:

$\lvert x-1,1\rvert < 0,2$	$d(x;1,1) < 0,2$	$x \in]0,9;1,3[$	$0,9 < x < 1,3$	$0,2$	$1,1$

التمرين الثالث :

$$A = 2\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C = \sqrt{35 + 10\sqrt{10}} \quad \text{و} \quad B = 2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 4\right)$$

1. **بيان أنّ: $A = 2 + \sqrt{5}$ و $B = 2 - \sqrt{5}$**

$$A = 2\sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = 2 \times 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \boxed{2 + \sqrt{5}}$$

$$B = 2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1) + 2\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 4\right) = 10 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 8 = \boxed{2 - \sqrt{5}}$$

حساب $A \times B$.

$$A \times B = (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = (2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = \boxed{-1}$$

2. **استنتاج قيمة $A^{2019} \times B^{2018}$ ومقلوب العدد A.**

$$A^{2019} \times B^{2018} = A \times (A \times B)^{2018} = A \times (-1)^{2018} = A = \boxed{2 + \sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \frac{2 - \sqrt{5}}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = \frac{2 - \sqrt{5}}{-1} = \boxed{-2 + \sqrt{5}}$$

3. **نشر العدد $(5 + \sqrt{10})^2$ ، واستنتاج قيمة مبسّطة للعدد C.**

$$(5 + \sqrt{10})^2 = (5)^2 + (\sqrt{10})^2 + 2(5)(\sqrt{10}) = \boxed{35 + 10\sqrt{10}}$$

$$C = \sqrt{35 + 10\sqrt{10}} = \sqrt{(5 + \sqrt{10})^2} = |5 + \sqrt{10}| = \boxed{5 + \sqrt{10}}$$

4. **برهان صحة المساواة: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \sqrt{5} - 1$**

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$+ \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{(\sqrt{4} + \sqrt{3})(\sqrt{4} - \sqrt{3})} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{(\sqrt{5} + \sqrt{4})(\sqrt{5} - \sqrt{4})}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{4} = \boxed{\sqrt{5} - 1}$$

5. **بيان أنّ: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ ، ثمّ كتابة العدد K على أبسط شكل ممكن.**

$$K = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}}$$

$$1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1+\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=1-(1-\sqrt{2})=\boxed{\sqrt{2}}$$

$$K=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}=K=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=K=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\boxed{\sqrt{2}}$$

$$\left(\mathbf{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\mathbf{1}+\underbrace{\mathbf{1}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\right)$$

التمرين الرابع :

1. **تعيين صورتي العددين -1 و2.**

$f(-1)=0$ و $f(2)=-5$

2. **تعيين السوابق الممكنة للعددين -6 و-4.**

العدد -6 ليست له سابقة، والعدد -4 له 3 سوابق هي: -4 ، 1 و3.

3. **تعيين القيم الحدّية للدالة f.**

تقبل الدالة f قيمة حدّية صغرى عند الفاصلة (2) تساوي (-5) وقيمة حدّية كبرى عند الفاصلة (-2) تساوي (1).

4. **جدول تغيرات الدالة f.**

x	-4	-2	2	5
$f(x)$	-4 ↗	1 ↘	-5 ↗	8

5. **حل بيانيا المتراجحة: $f(x)\leq 0$.**

تكون $f(x)\leq 0$ عندما يكون المنحنى (C_f) تحت محور الفواصل.

$$\boxed{S=[-4;-3]\cup[-1;4]}$$

6. **تعيين الدالة g.**

$$g(x)=ax+b\ ;\ \begin{cases}g(3)=-4\\ g(-3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+b=-4\ ...\ ①\\ -3a+b=0\ ...\ ②\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\underbrace{6a=-4}_{①-②}\\ \underbrace{2b=-4}_{①+②}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{2}\\ b=-2\end{cases}\Rightarrow\boxed{g(x)=-\frac{3}{2}x-2}$$

7. جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

جدول إشارة الدالة g.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

8. حل بيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$ والمتراجحة: $f(x) \leq g(x)$.

حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و(D).

$$\boxed{S = \{-3; 0; 3\}}$$

حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ هي قيم x التي من أجلها يكون (C_f) تحت (D).

$$\boxed{S = [-4; -3] \cup [0; 3]}$$

أسئلة متعددة الاختيارات

تعيين الإجابة الصحيحة من بين الأجوبة المقترحة مع التعليل :

1. إذا كان $x = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ، فإنّ : $x = y$

$$x = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{4} = \boxed{2}\,;\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{-1}} = \boxed{2}$$

2. العدد $\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{400}$ ينتمي إلى : $\mathbb{D}$

$$\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{400} = \frac{7-5}{400} = \frac{2}{400} = \boxed{\frac{1}{200}}$$

3. العدد $\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2$ يساوي : $47 + 6\sqrt{10}$

$$\left(\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}\right) = 2 + 45 + 6\sqrt{10}$$
$$= \boxed{47 + 6\sqrt{10}}$$

4. ضعف مربّع مجموع العددين a و b هو : $2(a+b)^2$

$$\underbrace{a+b}_{\text{المجموع}} \rightarrow \underbrace{(a+b)^2}_{\text{مربّع المجموع}} \rightarrow \underbrace{2(a+b)^2}_{\text{ضعف مربّع المجموع}}$$

5. إذا كان $x = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$ و $y = 1 - \sqrt{2}$ ، فإنّ : $x > y$

$$x = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = -y$$
$$1 < \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \boxed{x > y}$$

6. الكتابة العلمية للعدد $0,000358$ هي : $3,58 \times 10^{-4}$

$$0{,}000358 = \boxed{3{,}58 \times 10^{-4}}$$

7. الكتابة العلمية للعدد $a \times b$ هي : $1,2 \times 10^{-4}$

$$a \times b = 4 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-2} = 12 \times 10^{-5} = \boxed{1{,}2 \times 10^{-4}}$$

8. رتبة مقدار العدد b هي : 2×10^{-4}

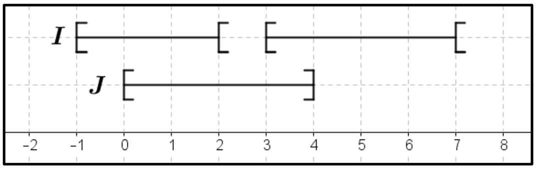
$$b = 4 \times (10^2)^{-3} \times 4{,}5 \times 10^8 \times 10^{-7} = 18 \times 10^{-5} = 1{,}8 \times 10^{-4}$$
$$\Rightarrow \boxed{b \approx 2 \times 10^{-4}}$$

9. إذا كان $I = [-1;2[\cup [3;7[$ ، فإنّ : $\frac{9}{2} \in I$

$$3 \leq \frac{9}{2} \leq 7 \Rightarrow \boxed{\frac{9}{2} \in I}$$

10. إذا كان $I = [-1;2[\cup [3;7[$ و $J = [0;4]$ ، فإنّ $I \cap J = [0;2[\cup [3;4]$

11. إذا كان $I = [-1;2[\cup [3;7[$ و $J = [0;4]$ ، فإنّ : $I \cup J = [-1;7[$



12. المجال الذي مركزه -1 وطوله 5 هو : $\left[-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right]$

$$c = -1\,; r = \frac{5}{2}\ ;\ -1 - \frac{5}{2} \le x \le -1 + \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{-\frac{7}{2} \le x \le \frac{3}{2}}$$

13. إذا كان $1 < x < 2$ و $3 < y < 4$ ، فإنّ : $-3 < x - y < -1$

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ -4 < -y < -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-3 < x - y < -1}$$

14. إذا كان $-3 < a < -1$ و $1 < b < 4$ ، فإنّ : $-12 < ab < -1$

$$\begin{cases} -3 < a < -1 \\ 1 < b < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -a < 3 \\ 1 < b < 4 \end{cases} \Rightarrow 1 < -ab < 12 \Rightarrow \boxed{-12 < ab < -1}$$

15. إذا كان $x \le -2$ فإنّ : $2x - 1 \le -5$

$$x \le -2 \Rightarrow 2x \le -4 \Rightarrow \boxed{2x - 1 \le -5}$$

16. إذا كان $x = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$ فإنّ : $x < x^2 < x^3$

$$x = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$x > 1 \Rightarrow \boxed{x < x^2 < x^3}$$

17. إذا كان $-5 \le b \le -1$ فإنّ : $\frac{1}{26} \le \frac{1}{b^2+1} \le \frac{1}{2}$

$$-5 \le b \le -1 \Rightarrow 1 \le b^2 \le 25 \Rightarrow 2 \le b^2 + 1 \le 26 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{26} \le \frac{1}{b^2+1} \le \frac{1}{2}}$$

18. إذا كان $A = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ و $B = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ ، فإنّ : $|A| + |B| = 2\sqrt{5}$

$$|A| + |B| = \left|\sqrt{5} + \sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{5} - \sqrt{3}\right| = \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

19. العدد $\left|\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right|$ يساوي : $\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \approx 1{,}41 \\ \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow \left|\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} = \boxed{\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{2}}$$

20. إذا كان $|x| < 2$ فإنّ : $x^2 \in [0;4[$

$$|x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow 0 \le x^2 < 4 \Rightarrow \boxed{x^2 \in [0;4[}$$

21. العدد $|1-2\times 3|-2|3-5\times 2|$ يساوي : -9

$$|1-2\times 3|-2|3-5\times 2| = |-5|-2|-7| = 5-2\times 7 = \boxed{-9}$$

22. إذا كان $|x+5|\leq 3$ فإنّ : $x\in[-8;-2]$

$$|x+5|\leq 3 \Rightarrow -3\leq x+5\leq 3 \Rightarrow -8\leq x\leq -2 \Rightarrow \boxed{x\in[-8;-2]}$$

23. إذا كان $x\in[-3;7]$ فإنّ : $d(x;2)\leq 5$

$$c=\frac{-3+7}{2}=2\,;r=7-2=5\,;\ x\in[-3;7] \Rightarrow \boxed{d(x;2)\leq 5}$$

24. حلول المعادلة $|x-2|=3$ هي : $S=\{-1;5\}$

$$|x-2|=3 \Rightarrow x-2=-3 \text{ أو } x-2=3 \Rightarrow \boxed{x=-1 \text{ أو } x=5}$$

25. حلول المعادلة $|x+2|=|x-7|$ هي : $S=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

$$|x+2|=|x-7| \Rightarrow d(x;-2)=d(x;7) \Rightarrow x=\frac{-2+7}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

26. مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق $|x-2|\leq 2$ هي المجال : $[0;4]$

$$|x-2|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x-2\leq 2 \Rightarrow 0\leq x\leq 4 \Rightarrow \boxed{x\in[0;4]}$$

27. مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق $\left|x-\frac{5}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ هي المجال : $[2;3]$

$$\left|x-\frac{5}{2}\right|\leq\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x-\frac{5}{2}\leq\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}+\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{2\leq x\leq 3}$$

28. مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\frac{3x+5}{-x+2}$ هي : $\mathbb{R}-\{2\}$

$$-x+2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \boxed{D_f=\mathbb{R}-\{2\}}$$

29. مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\frac{3x+5}{|x|-2}$ هي : $\mathbb{R}-\{-2;2\}$

$$|x|-2=0 \Rightarrow |x|=2 \Rightarrow x=-2 \text{ أو } \Rightarrow x=2 \Rightarrow \boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}}$$

30. مجموعة تعريف الدالة $f(x)=\sqrt{3x+6}$ هي : $[-2;+\infty[$

$$3x+6\geq 0 \Rightarrow 3x\geq -6 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow \boxed{D_f=[-2;+\infty[}$$

31. الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+|x|$ هي : زوجية

D_f متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x\in D_f$ لدينا :

$$f(-x)=(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=f(x) \Rightarrow \boxed{f \text{ دالة زوجية}}$$

32.

أ. **المنحنى (C_f) يقطع : المحورين معًا**

الدالة f معرّفة على المجال $[-5;8]$ ، إذن المنحنى (C_f) يقطع محور التراتيب (لأنّ الدالة f معرّفة عند 0)

من جدول التغيّرات لدينا : $f(-2) = 0$ ، إذن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل عند النقطة $(-2;0)$

ب. إذا كان $x \in [-2;2]$ فإنّ : $f(x) \in [0;2]$

$$\begin{cases} x \in [-2;-1] \Rightarrow f(x) \in [0;2] \\ x \in [-1;2] \Rightarrow f(x) \in [1;2] \end{cases} \Rightarrow f(x) \in [0;2] \cup [1;2] \Rightarrow \boxed{f(x) \in [0;2]}$$

ج. عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ هو : 2

للعدد 2 سابقتان ، الأولى -1 والثانية محصورة بين 2 و 8

د. العدد 0 له : سابقة واحدة

للعدد 0 سابقة واحدة هي -2

ه. حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي : $[-2;8]$

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ الدالة f سالبة على المجال $[-5;-2]$ وموجبة على المجال $[-2;8]$

و. من أجل $x \in [-1;8]$ تكون الدالة f : غير رتيبة

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ الدالة f متناقصة على المجال $[-1;2]$ ومتزايدة على المجال $[2;8]$

.33

أ. الدالة f متزايدة على المجال : $[-5;-3] \cup [1;4]$

f متناقصة $x \in [-3;1] \Rightarrow$; f متزايدة $x \in [-5;-3] \cup [1;4] \Rightarrow$

ب. عدد حلول المعادلة $f(x) = 2$ هو : 3

$$f(x) = 2 \Rightarrow x_1 = 4 \; ; \; -5 < x_2 < -4 \; ; \; -2 < x_3 < -1$$

ج. العدد 0 له : ثلاث سوابق

للعدد 0 ثلاث سوابق هي : 3 ، -1 و -5

د. حلول المتراجحة $f(x) < 0$ هي : $]-1;3[$

$$x \in [-5;-1] \cup [3;4] \Rightarrow f(x) \geq 0 \;\; ; \;\; x \in]-1;3[\Rightarrow f(x) < 0$$

ه. تقبل الدالة f : قيمتين حدّيتين

تقبل الدالة f قيمة حدّية كبرى عند النقطة ذات الفاصلة $(-3) \approx 4,1$ ، وقيمة حدّية صغرى عند النقطة ذات الفاصلة $(1) \approx -4,2$.

قواعد الحياة

إياك أن تكون "مفعولا به" .. كن دائما "فاعلا"

مهما أحسست "بالكسرة" اترك بقلبك "فتحة" تدخل منها الأحلام

لا تكره أحدا لمجرد أنّه مختلف معك .. اترك مشاعرك "ضمّة" لكل الناس

لا ترض أن تكون "مجرورا" من أحد مهما كان قريبا منك .. فستلقى نفسك دائما "مرفوع" الرأس

صحيح يمكنك أن تحنّ إلى الذكريات .. لكن لا تستسلم لـ"كان وأخواتها"

لا تنخدع لكل من ابتسم لك .. وانتبه من "أدوات النصب"

اشتغل واحلم وتحدّ ولا تسمح أن يكون مستقبلك "مبنيا للمجهول"

لا تخبئ مشاعرك اتجاه أحد .. فالمشاعر التي تأتي متأخرة تصبح "ممنوعة من الصرف"

عش دائما "مبتدأ" .. ولا تكن مجرد "خبر"

حلول
الاختبارات
الفصل
الثاني

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. مجموعة حلول المتراجحة $\frac{-x+1}{2+x} \geq 0$ هي $S =]-2; 1[$: خطأ

$-x+1=0 \Rightarrow x=1\,; 2+x=0 \Rightarrow x=-2\,;\ \boxed{S=]-2;1]}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x+1$		+	|	+	0	−	
$2+x$		−	0	+	|	+	
$\frac{-x+1}{2+x}$		−	||	+	0	−	

2. من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \leq 1 + sinx \leq 2$: صحيح

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \boxed{0 \leq 1+\sin x \leq 2}$

3. $(\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x . \cos x = -1$: خطأ

$$\begin{aligned}(\sin x-\cos x)^2+2\sin x . \cos x\\ &= \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x+2\sin x\cos x\\ &= \sin^2 x+\cos^2 x=\boxed{1}\end{aligned}$$

4. المعادلة $\frac{x^2-x+1}{x-2} = 0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$: صحيح

$$\frac{x^2-x+1}{x-2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-x+1=0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}\ ;\ \Delta=(-1)^2-4(1)(1)=-3$$

بما أنّ $\Delta < 0$ ، فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

II- اختر الجواب الصحيح مع التعليل :

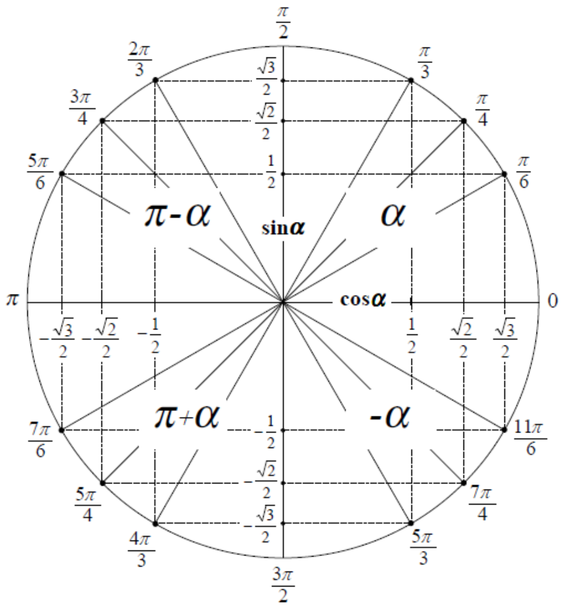
1. مجموعة تعريف الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ هي : ج) $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=-1$ أو $x=1 \Rightarrow \boxed{D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}}$

2. قيمة العدد $\cos\left(\frac{-29\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-29\pi}{2}\right)$ هي : أ) 1

$$\cos\left(\frac{-29\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-29\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{-28\pi-\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-28\pi-\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(-14\pi-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-14\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0-(-1)=\boxed{1}$$

التمرين الثاني :



1. تعيين قيم α حيث : $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ و $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}\\ -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\alpha=-\frac{\pi}{3}\ \text{أو}\ \alpha=\frac{\pi}{3}}$$

2. تعيين القيم المضبوطة لـ : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ و $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

3. **لتكن f الدالة المعرّفة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ بالعبارة : $f(x)=-2\cos x+3$**

دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ حيث $x_1<x_2$. لدينا :

$$0\le x_1<x_2\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos x_1>\cos x_2\Rightarrow -2\cos x_1<-2\cos x_2$$
$$\Rightarrow -2\cos x_1+3<-2\cos x_2+3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

انشاء جدول تغيّراتها

$$f(0)=-2\cos(0)+3=-2(1)+3=1$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+3=-2(0)+3=3$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	1	$\nearrow$	3

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-2x-3$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. **التحقّق من أنّ $f(x)=(x-1)^2-4$ من أجل كل عدد حقيقي x**

طريقة أولى : باستعمال التحليل

$$(x-1)^2-4=x^2-2x+1-4=x^2-2x-3=f(x)$$

طريقة ثانية : باستعمال الشكل النموذجي

$$f(x)=\boldsymbol{x^2-2x}-3=\boldsymbol{(x-1)^2-1}-3=\boxed{(x-1)^2-4}$$

2. **استنتاج أنّ $f(x)\ge -4$ من أجل كل عدد حقيقي x**

$$(x-1)^2\ge 0\Rightarrow(x-1)^2-4\ge -4\Rightarrow\boxed{f(x)\ge -4}$$

3. **دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال [1 ;∞-] ثمّ على المجال [∞+ ; 1]**

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $]-\infty;1]$ حيث $x_1<x_2$. لدينا :

$$x_1<x_2\le 1\Rightarrow x_1-1<x_2-1\le 0\Rightarrow(x_1-1)^2>(x_2-1)^2$$
$$\Rightarrow(x_1-1)^2-4>(x_2-1)^2-4\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[1;+\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2$$
$$\Rightarrow (x_1-1)^2 - 4 < (x_2-1)^2 - 4 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

انشاء جدول تغيرات الدالة f

$f(1) = -4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-4	↗	

4. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ واستنتاج نقاط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 4$$
$$\Rightarrow x - 1 = -2 \text{ أو } x - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ أو } x = 3}$$

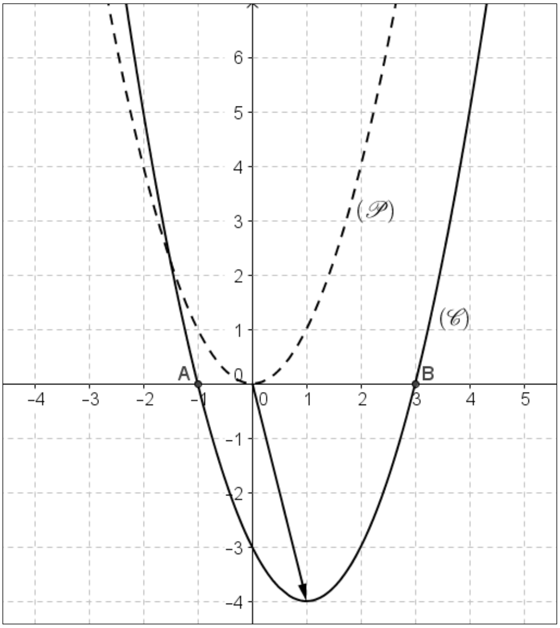
منه، نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل عند النقطتين $\boxed{A(-1;0)}$

و $\boxed{B(3;0)}$

5. شرح كيف يمكن رسم $(\mathscr{C})$ انطلاقا من $(\mathscr{P})$ المنحنى البياني للدالة مربّع

المنحنى $(\mathscr{C})$ هو انسحاب للمنحنى $(\mathscr{P})$ وفق الشعاع $\boxed{\vec{u}(1;-4)}$

انشاء $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{P})$



.6 حلّ بيانيا المتراجحة $f(x) \geq 0$

تكون $f(x) \geq 0$ عندما يكون المنحنى ($\mathscr{C}$) فوق محور الفواصل

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[}$$

التمرين الرابع :

.1 نعتبر $A(x)$ مساحة المضلّع SABCD

أ. بيان أنّ : $SI = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$$SI^2 = SB^2 - IB^2 = x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow SI = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

ب. كتابة $A(x)$ بدلالة x

$$A(x) = BC^2 + \frac{AB \times SI}{2} = x^2 + \frac{x.\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \boxed{\frac{4+\sqrt{3}}{4}x^2}$$

.2 نفرض أنّ x عدد طبيعي. ما هي أكبر قيمة لـ x تجعل الطول SH أصغر تماما من 6

$$SH < 6 \Rightarrow SI + IH < 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + x < 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+2}{2}x < 6$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}+2\right)x < 12 \Rightarrow x < \frac{12}{\sqrt{3}+2} \Rightarrow x < 12\left(2-\sqrt{3}\right)$$

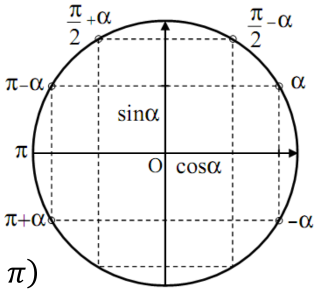
منه نستنتج أنّ أكبر قيمة لـ x بحيث $SH < 6$ هي $\boxed{3}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

1. بيان أنّ: $\boldsymbol{A(x) = \sin x - \cos x}$ **وَ** $\boldsymbol{B(x) = \sin x + \cos x}$

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos\frac{17\pi}{2} - \sin(x+\pi) + \cos(11\pi + x) \\ &= \cos\left(\boldsymbol{8\pi} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(x+\pi) + \cos(\boldsymbol{10\pi} + \pi + x) \\ &= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - \underbrace{\sin(x+\pi)}_{-\sin x} + \underbrace{\cos(\pi + x)}_{-\cos x} \\ &= \boxed{\sin x - \cos x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} B(x) &= \cos(-x) + \sin(7\pi - x) - \sin 3\pi \\ &= \cos(-x) + \sin(\boldsymbol{6\pi} + \pi - x) - \sin(\boldsymbol{2\pi} + \pi) \\ &= \underbrace{\cos(-x)}_{\cos x} + \underbrace{\sin(\pi - x)}_{\sin x} - \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \\ &= \boxed{\sin x + \cos x} \end{aligned}$$

2. بيان أنّ: $\boldsymbol{A(x).B(x) = 1 - 2\cos^2 x}$

$$\begin{aligned} A(x).B(x) &= (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = \boxed{1 - 2\cos^2 x} \end{aligned}$$

3. حساب $\boldsymbol{\sin x}$ **و** $\boldsymbol{\cos x}$ **علما أنّ:** $\boldsymbol{A(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$ **وَ** $\boldsymbol{B(x) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$

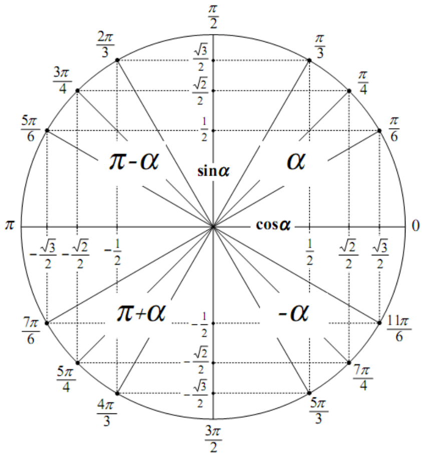
$$\begin{cases} \sin x - \cos x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \ldots ① \\ \sin x + \cos x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \ldots ② \end{cases}$$

$$① + ② \Rightarrow 2\sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$② - ① \Rightarrow 2\cos x = -1 \Rightarrow \boxed{\cos x = -\frac{1}{2}}$$

استنتاج قيم x في المجال $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos x = -\frac{1}{2}$ و $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ منه $\boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$



التمرين الثاني :

I- $E(x) = -2x^2 - 4x + 6$

.1 حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $E(x) = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(-2)(6) = 64$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-8}{-4} = \boxed{1}\ ;\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+8}{-4} = \boxed{-3}$$

.2 تحليل العبارة الجبرية $E(x)$ إلى جداء عاملين

$$\boxed{E(x) = -2(x-1)(x+3)}$$

.3 دراسة إشارة $E(x)$ حسب قيم المتغير الحقيقي x

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+	
$x+3$		-	0	+		+	
$(x-1)(x+3)$		+	0	-	0	+	
$E(x)$		-	0	+	0	-	

- من أجل $x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;+\infty\right[$: $E(x) < 0$
- من أجل $x \in [-3;1]$: $E(x) \geq 0$

4. حساب $E(x)$ من أجل $x = \sqrt{2}$ ثمّ من أجل $x = \frac{1}{3}$

$$E(\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} + 6 = \boxed{2 - 4\sqrt{2}}$$

$$E\left(\frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 6 = -\frac{2}{9} - \frac{4}{3} + 6 = \boxed{\frac{40}{9}}$$

II- $F(x) = \frac{2x+4}{E(x)}$

1. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $F(x) = 0$

$F(x) = 0$ معناه $2x + 4 = 0$ و $E(x) \neq 0$ أي $x = -2$ ومنه : $\boxed{S = \{-2\}}$

2. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $F(x) \geq 0$

$F(x) \geq 0$ معناه $2x + 4 \geq 0$ و $E(x) \neq 0$ أي $x \geq -2$ و $x \neq 1$ ومنه :

$$\boxed{S = [-2; 1[\cup]1; +\infty[}$$

التمرين الثالث :

1. حساب تكرار كل فئة علما أنّ المجمّع الصاعد للفئة $[50 ; 55[$ يساوي 23

$$\begin{cases} a + b + 2a = 23 \\ b + 3 + 2a - 4 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 23 \\ 2a + b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 8 \end{cases}$$

الفئات	$]40 ; 45]$	$]45 ; 50]$	$]50 ; 55]$	$]55 ; 60]$	$]60 ; 65]$
التكرار	5	8	10	11	6
ت م ص	5	13	23	34	40

2. حساب وسيط هذه السلسلة

بما أنّ التكرار الكلي هو 40 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 20 والفئة الوسيطية هي $[50; 55[$ ، ومنه :

$$Med = 50 + \frac{7 \times 5}{10} = 50 + 3{,}5 = \boxed{53{,}5}$$

حيث تمثل الأعداد 50 ، 7 ، 5 و 10 على الترتيب : الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{50}}; 55[$، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية ($\mathbf{7} = 20 - 13$)، طول الفئة الوسيطية ($\mathbf{5} = 55 - 50$) وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية ($\mathbf{10}$).

التمرين الرابع :

I- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ، $g(x) = \frac{-2x-1}{x+1}$

1. **اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x+1)^2 - 2$**

$f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 1 - 1 = \boxed{(x+1)^2 - 2}$

2. **دراسة اتجاه تغير الدالة f**

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من المجال $]-\infty; -1]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$x_1 < x_2 \leq -1 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \leq 0 \Rightarrow (x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$

$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 2 > (x_2+1)^2 - 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; -1]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من $[-1; +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$-1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_1+1)^2 < (x_2+1)^2$

$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 2 < (x_2+1)^2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $[-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

3. **بيان أنّه يمكن استنتاج المنحنى ($\mathscr{C}_f$) انطلاقا من المنحنى (P) الممثل للدالة مربّع**

بما أنّ $f(x) = (x+1)^2 - 2$ ، فإنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) هو انسحاب للمنحنى (P) وفق الشعاع $\vec{u}(-1; -2)$

4. **تعيين إحداثيات نقط تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع محور الفواصل**

$f(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 2$

$\Rightarrow x + 1 = -\sqrt{2}$ أو $x + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2} - 1$ أو $x = \sqrt{2} - 1$

نستنتج أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في النقطتين $\boxed{A(-\sqrt{2} - 1; 0)}$

و $\boxed{B(\sqrt{2} - 1; 0)}$.

II-

1. **تعيين مجموعة تعريف الدالة g**

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x + 1 \neq 0\}$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-1\}}$

2. حساب $g(0)$ و $g(-2)$

$$g(0)=-\frac{1}{1}=\boxed{-1}\,;\,g(-2)=\frac{-2(-2)-1}{-2+1}=\frac{3}{-1}=\boxed{-3}$$

3. تحقّق أنّه من أجل كل x من Dg : $g(x)=-2+\frac{1}{x+1}$

طريقة أولى :

$$g(x)=-2+\frac{1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+1}{x+1}=\frac{-2x-2+1}{x+1}=\boxed{\frac{-2x-1}{x+1}}$$

طريقة ثانية :

$$g(x)=\frac{-2x-1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+1}{x+1}=\frac{-2(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\boxed{-2+\frac{1}{x+1}}$$

4. دراسة اتجاه تغير الدالة g

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $]-\infty;-1[$ حيث $x_1<x_2$. لدينا :

$$x_1<x_2<-1\Rightarrow x_1+1<x_2+1<0\Rightarrow\frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1}$$

$$\Rightarrow -2+\frac{1}{x_1+1}>-2+\frac{1}{x_2+1}\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

منه، الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;-1[$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $]-1;+\infty[$ حيث $x_1<x_2$. لدينا :

$$-1<x_1<x_2\Rightarrow 0<x_1+1<x_2+1\Rightarrow\frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1}$$

$$\Rightarrow -2+\frac{1}{x_1+1}>-2+\frac{1}{x_2+1}\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

منه، الدالة g متناقصة على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g

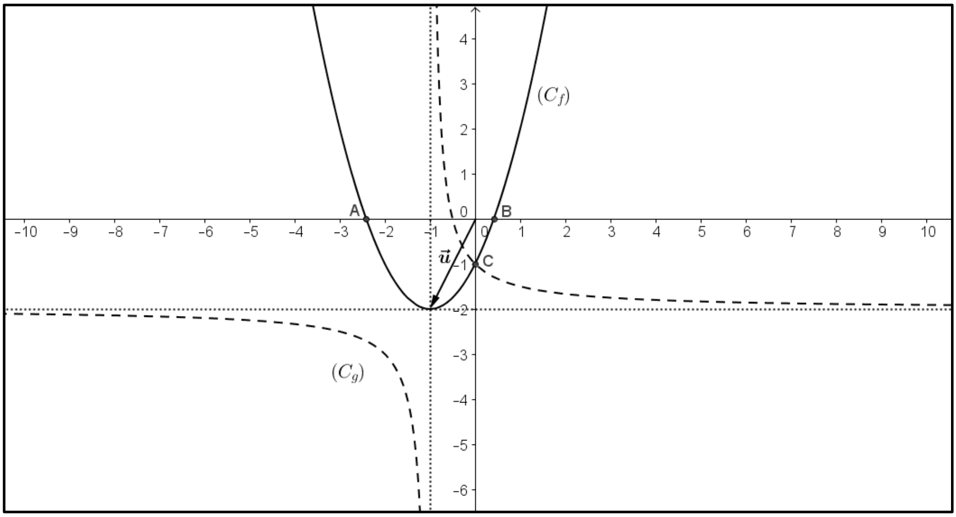
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

5. **بيان أنّه يمكن استنتاج المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من المنحنى (H) الممثل للدالة مقلوب**

بما أنّ $g(x)=\frac{-2x-1}{x+1}$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ هو انسحاب للمنحنى (P) وفق الشعاع $\vec{u}(-1;-2)$

-III

1. انشاء كلا من (C_f) و (C_g) في نفس المعلم



2. حل بيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$

المنحنيان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ يتقاطعان في النقطة $C(0;-1)$ ، منه ، حل المعادلة $f(x) = g(x)$ هو $\boxed{x = 0}$

3. حلّ جبريا المتراجحتين : $f(x) \leq 0$ و $g(x) \geq 0$

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 \leq 0\ ;\ \Delta = (2)^2 - 4(1)(-1) = 4 + 4 = 8$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}\ ;\ x_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \left[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}\right]}$$

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x-1}{x+1} \geq 0$$

$$-2x - 1 = 0 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ ; x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		+		+	0	−	
$x+1$		−	0	+		+	
$\frac{-2x-1}{x+1}$		−	‖	+	0	−	

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right]}$$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

$$E(x) = x^3 - 19x + 30$$

.1 اثبات أنّ : $E(x) = (x-3)(x^2+3x-10)$

$$E(x) = (x-3)(x^2+3x-10) = x^3 + 3x^2 - 10x - 3x^2 - 9x + 30$$

$$\boxed{E(x) = x^3 - 19x + 30}$$

.2 حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2+3x-10=0$

$$x^2+3x-10=0\ ;\ \Delta = (3)^2 - 4(1)(-10) = 9 + 40 = 49 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5\ ;\ x_2 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2\ ;\ \boxed{S = \{-5; 2\}}$$

استنتاج تحليل للعبارة $x^2+3x-10$

$$x^2+3x-10 = \boxed{(x+5)(x-2)}$$

.3 دراسة إشارة $E(x)$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$		-5		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2+3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$E(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

استنتاج حلول المتراجحة $E(x) \geq 0$

$$E(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in [-5; 2] \cup [3; +\infty[}$$

التمرين الثاني :

كتابة العبارات التالية بدلالة $\sin x$ و $\cos x$:

.1 $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$

$$\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x) = \underbrace{\cos(\pi - x)}_{-\cos x} + \underbrace{\cos(\pi + x)}_{-\cos x} = \boxed{-2\cos x}$$

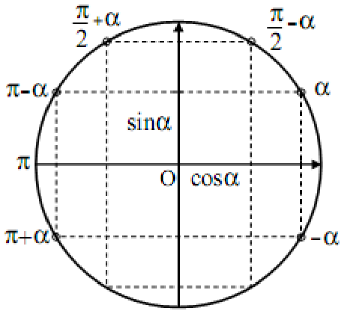
.2 $\sin(-x) - \sin(-x + 3\pi)$

$$\sin(-x) - \sin(-x + 3\pi) = \underbrace{\sin(-x)}_{-\sin x} - \underbrace{\sin(\pi - x)}_{\sin x} = \boxed{-2\sin x}$$

$\mathbf{\cos(x-5\pi)+\sin(-x+3\pi)}$ .3

$$\cos(x-5\pi)+\sin(-x+3\pi)=\cos(x-\pi)+\sin(-x+\pi)$$

$$=\underbrace{\cos(\pi-x)}_{-\cos x}+\underbrace{\sin(\pi-x)}_{\sin x}=\boxed{-\cos x+\sin x}$$



التمرين الثالث :

.1 تعيين التكرار الكلي N

$N=25$

.2 جدول التوزيعات التكرارية

العلامات	3	5	6	7	8	9	10	11	12	15
التكرار	1	1	3	4	2	2	5	4	1	2
ت م ص	1	2	5	9	11	13	18	22	23	25
ت م ن	25	24	23	20	16	14	12	7	3	2
التواتر	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$

أ. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة 7 على الأقل هو $\boxed{20}$

ب. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة 11 على الأكثر هو $\boxed{22}$

.3 حساب الوسط الحسابي ، الوسيط و المنوال لهذه السلسلة

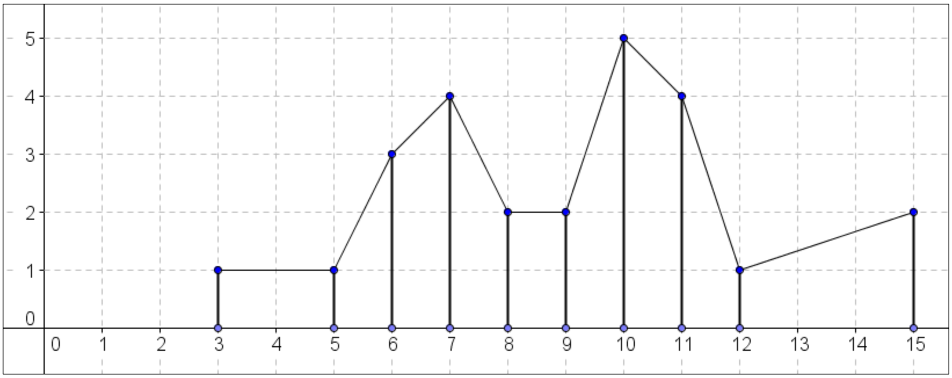
$$\bar{x}=\frac{3+5+(6\times3)+(7\times4)+(8\times2)+(9\times2)+(10\times5)+(11\times4)+12+(15\times2)}{25}$$

$\boxed{\bar{x}\approx 8{,}32}$

بما أنّ $N=25$ فإنّ رتبة الوسيط هي 13 ، ومنه : $\boxed{Med=9}$

منوال هذه السلسلة هو $\boxed{10}$

.4 تمثيل هذه السلسلة بمخطط الأعمدة وانشاء المضلع التكراري



التمرين الرابع :

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 8x + 7}$$

1. التحقّق أنّ $f(x) = (x-4)^2 - 9$ من أجل كل عدد حقيقي x

طريقة ① ... $f(x) = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 16 + 7 = \boxed{(x-4)^2 - 9}$

طريقة ② ... $f(x) = (x-4)^2 - 9 = x^2 - 8x + 16 - 9 = \boxed{x^2 - 8x + 7}$

2. حساب $f(4)$ ، وبيان أنّ للدالة f قيمة حدية صغرى عند $x = 4$

$f(4) = (4-4)^2 - 9 = -9$

$(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-4)^2 - 9 \geq -9 \Rightarrow f(x) \geq -9$

منه، تقبل الدالة f قيمة حدّية صغرى عند $x = 4$ تساوي (-9)

3. دراسة اتجاه تغير الدالة f

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $]-\infty; 4]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$x_1 < x_2 \leq 4 \Rightarrow x_1 - 4 < x_2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 4)^2 > (x_2 - 4)^2$

$\Rightarrow (x_1 - 4)^2 - 9 > (x_2 - 4)^2 - 9 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 4]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[4; +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$4 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4 \Rightarrow (x_1 - 4)^2 < (x_2 - 4)^2$

$\Rightarrow (x_1 - 4)^2 - 9 < (x_2 - 4)^2 - 9 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $[4; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

4. تعيين إحداثيات نقاط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ مع محوري الإحداثيات

$$\boldsymbol{f(x)=0} \Rightarrow (x-4)^2-9=0 \Rightarrow (x-4)^2=9$$

$$\Rightarrow x-4=-3 \text{ أو } x-4=3 \Rightarrow x=1 \text{ أو } x=7$$

نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور الفواصل في النقطتين $\boxed{A(1;0)}$

و $\boxed{B(7;0)}$.

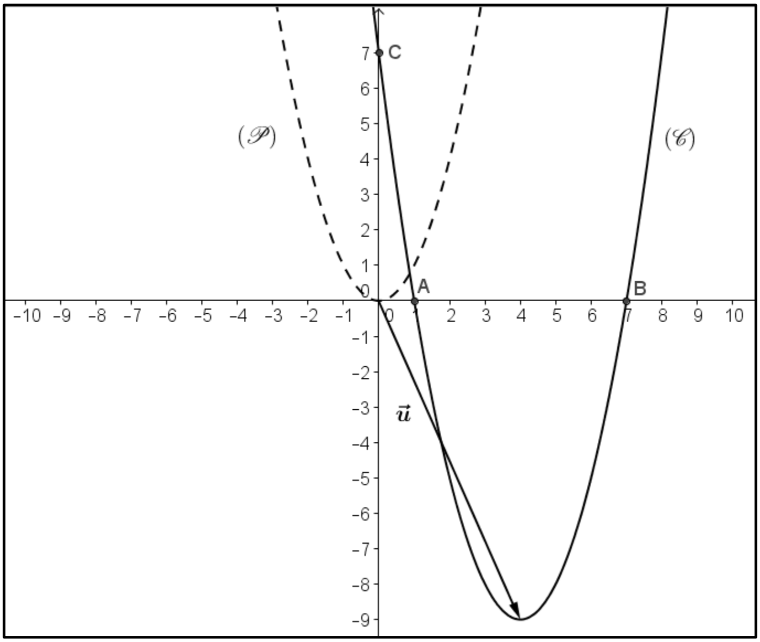
$$\boldsymbol{f(0)=7}$$

نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C})$ يقطع محور التراتيب في النقطة $\boxed{C(0;7)}$

5. شرح كيف يمكن رسم $(\mathscr{C})$ انطلاقا من $(\mathscr{P})$ المنحنى البياني للدالة مربّع

بما أنّ $f(x)=(x-4)^2-9$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C})$ هو انسحاب للمنحنى $(\mathscr{P})$ وفق الشعاع $\vec{u}(4;-9)$

انشاء $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{P})$



الموضوع الرابع

التمرين الأول :

I- اختر الجواب الصحيح مع التعليل :

1. مجموعة تعريف الدالة f حيث : $f(x)=\sqrt{x-3}$ هي : ب) $[3\,;+\infty[$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,; x-3\geq 0\}$

$x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3 \Rightarrow \boxed{D_f=[3;+\infty[}$

2. الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=2x^2-x$ هي : ج)لا زوجية و لا فردية

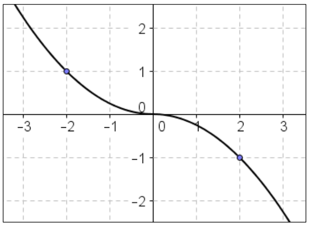
$h(-x)=2(-x)^2-(-x)=2x^2+x$

بما أنّ $h(-x)\neq h(x)$ و $h(-x)\neq -h(x)$ ، فإنّ الدالة h ليست زوجية ولا فردية

3. g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ حيث $g(2)=-1$، g فردية ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

أ. g متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و $g(-2)=1$

بما أنّ الدالة g فردية ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C})$ متناظر بالنسبة للمركز ، منه نستنتج أنّ الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و $g(-2)=-g(2)=1$



II- أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. من أجل كل عدد حقيقي x: $1\leq 2+cosx\leq 3$: صحيح

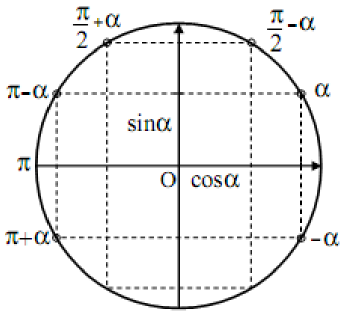
$-1\leq \cos x\leq 1 \Rightarrow 2-1\leq 2+\cos x\leq 2+1 \Rightarrow \boxed{1\leq 2+\cos x\leq 3}$

2. $\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{55\pi}{6}\right)=+1$: خطأ

$$\cos\left(\frac{32\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{55\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{33\pi-\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{54\pi+\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\left(11\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(9\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\boxed{-1}$$

III- تبسيط العبارة E:

$$E=\sin(x-4\pi)+\cos(-x+6\pi)+\sin(x+3\pi)+\cos(x+3\pi)$$
$$=\sin x+\underbrace{\cos(-x)}_{\cos x}+\underbrace{\sin(\pi+x)}_{-\sin x}+\underbrace{\cos(\pi+x)}_{-\cos x}$$
$$=\sin x+\cos x-\sin x-\cos x=\boxed{0}$$



التمرين الثاني :

$$\boldsymbol{B(x)=(x^2-1)(2x-1)} \text{ ، } \boldsymbol{A(x)=(4x^2-1)(x+1)}$$

1. تحليل $A(x)$ و $B(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

$$A(x)=(4x^2-1)(x+1)\Rightarrow \boxed{A(x)=(2x-1)(2x+1)(x+1)}$$
$$B(x)=(x^2-1)(2x-1)\Rightarrow \boxed{B(x)=(x-1)(x+1)(2x-1)}$$

2. استنتاج تحليل $P(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى

$$P(x)=A(x)-B(x)$$
$$=(2x-1)(2x+1)(x+1)-(x-1)(x+1)(2x-1)$$
$$=(2x-1)(x+1)[(2x+1)-(x-1)]$$
$$=\boxed{(2x-1)(x+1)(x+2)}$$

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$

$$P(x)=0\Rightarrow(2x-1)(x+1)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2x-1=0\\ \text{أي}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x+1=0\\ \text{أي}\\ x=-1\end{cases} \text{ أو } \begin{cases}x+2=0\\ \text{أي}\\ x=-2\end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\left\{\frac{1}{2};-1;-2\right\}}$$

3. $Q(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$

أ. تعيين مجموعة تعريف العبارة $Q(x)$

$D_Q = \{x \in \mathbb{R}\,; B(x) \neq 0\}$

$B(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(2x-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{أي} \\ x=1 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} x+1=0 \\ \text{أي} \\ x=-1 \end{cases} \text{أو} \begin{cases} 2x-1=0 \\ \text{أي} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{D_Q = \mathbb{R} - \left\{-1; \frac{1}{2}; 1\right\}}$$

ب. اختزال $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{(2x-1)(2x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(2x-1)} \Rightarrow \boxed{Q(x) = \frac{2x+1}{x-1}}$$

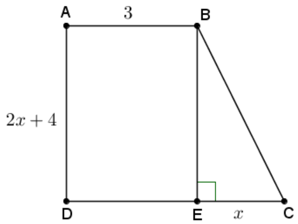
ج. حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $Q(x) \leq 0$

$2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\,; x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		-	0	+		+	
$x-1$		-		-	0	+	
$\frac{2x+1}{x-1}$		+	0	-	||	+	

$$Q(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x-1} \leq 0\,; \boxed{S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right[}$$

التمرين الثالث :



1. حساب بدلالة x المساحة $A(x)$ للمستطيل DABE

$A(x) = AB \times AD = 3(2x+4) \Rightarrow \boxed{A(x) = 6x + 12}$

2. حساب بدلالة x المساحة $B(x)$ للمثلث EBC

$$B(x) = \frac{CE \times BE}{2} = \frac{x(2x+4)}{2} = \frac{2x^2+4x}{2} \Rightarrow \boxed{B(x) = x^2 + 2x}$$

3. تعيين العدد الحقيقي a بحيث : $B(x) = (x+1)^2 + a$

$B(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

1. دراسة تغيرات الدالة B على المجال $[0 ; +\infty[$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[0;+\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow 1 \le x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_1+1)^2 < (x_2+1)^2$$
$$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 1 < (x_2+1)^2 - 1 \Rightarrow B(x_1) < B(x_2)$$

منه، الدالة B متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

2. التحقّق أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$

$$(x-6)(x+2) = x^2 + 2x - 6x - 12 = \boxed{x^2 - 4x - 12}$$

3. تعيين قيم x بحيث تكون المساحة $B(x)$ أكبر تماما من المساحة $A(x)$

$$B(x) > A(x) \Rightarrow x^2 + 2x > 6x + 12 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 > 0$$
$$\Rightarrow (x-6)\underbrace{(x+2)}_{>0} > 0 \Rightarrow x - 6 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 6}$$

4. تعيين المساحة $F(x)$ لشبه المنحرف ABCD

$$F(x) = A(x) + B(x) = 6x + 12 + x^2 + 2x \Rightarrow \boxed{F(x) = x^2 + 8x + 12}$$

5. التحقّق أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x^2 + 8x - 20 = (x-2)(x+10)$

$$(x-2)(x+10) = x^2 + 10x - 2x - 20 = \boxed{x^2 + 8x - 20}$$

6. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $F(x) = 32$

$$F(x) = 32 \Rightarrow x^2 + 8x + 12 = 32 \Rightarrow x^2 + 8x - 20 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)\underbrace{(x+10)}_{>0} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

التمرين الرابع :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ و } \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{AC}\binom{-4}{4}$$

1. تعليم النقط A ، B ، C

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ومنه $\boxed{A(2;1)}$ ، $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ يعني $\begin{cases} x_B - x_A = -4 \\ y_B - y_A = -2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x_B = -2 \\ y_B = -1 \end{cases}$ ومنه $\boxed{B(-2;-1)}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$ يعني $\begin{cases} x_C - x_A = -4 \\ y_C - y_A = 4 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x_C = -2 \\ y_C = 5 \end{cases}$ ومنه $\boxed{C(-2;5)}$

2. برهان أنّ النقط A ، B ، O على استقامة واحدة

لدينا : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ و $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} - \vec{j}$ أي $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ إذن الشعاعان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مرتبطان خطّيا ، ومنه نستنتج أنّ النقط A ، B ، O على استقامة واحدة

3. تعيين احداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الاضلاع وتعيين احداثيي مركزه I

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا تحققت العلاقة : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ، ومنه

$$\begin{cases} -2 - x_D = -4 \\ 5 - y_D = -2 \end{cases}$$

إذن $\begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 7 \end{cases}$ ومنه $\boxed{D(2;7)}$

مركز الرباعي $ABCD$ هو منتصف قطريه $[AC]$ و $[BD]$ أي

$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = 3 \end{cases}$ ومنه $\boxed{I(0;3)}$

4. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و C

أ. كتابة معادلة للمستقيم (Δ) وتعيين معامل توجيهه

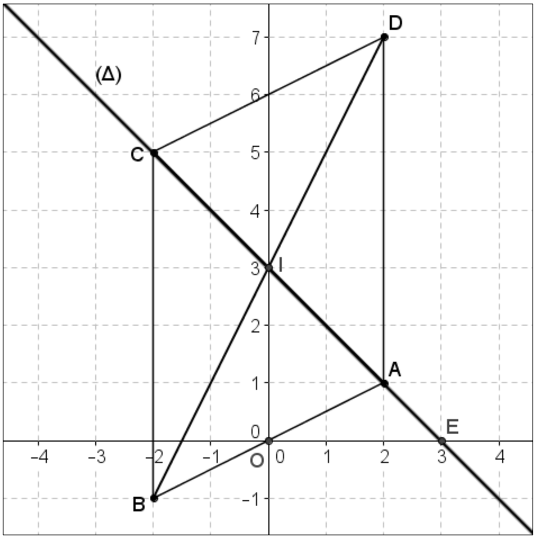
$M(x;y) \in (\Delta)$ معناه $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AM}$ أي $4(x-2) + 4(y-1) = 0$

ومنه $x + y - 3 = 0$ أي $\boxed{(\Delta): y = -x + 3}$ ومعامل توجيهه هو (-1)

ب. تعيين احداثيي E نقطة تقاطع (Δ) مع حامل محور الفواصل

لتعيين نقطة تقاطع (Δ) و (xx') ، نحل الجملة : $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$، ومنه نستنتج أنّ : $\boxed{(\Delta) \cap (xx') = \{E(3;0)\}}$

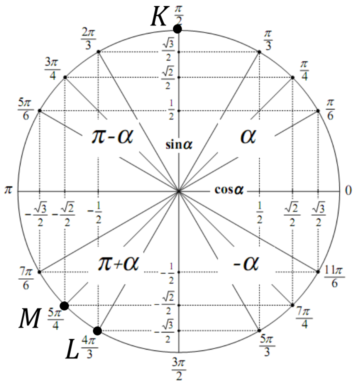


الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1. لتكن K ، L ، M صور الأعداد $\frac{15\pi}{6}$ ، $\frac{16\pi}{3}$ و $\frac{-3\pi}{4}$ على الترتيب

أ. تمثيل النقط K ، L ، M على الدائرة المثلثية



$$\frac{15\pi}{6}=\frac{12\pi+3\pi}{6}=2\pi+\frac{3\pi}{6}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{16\pi}{3}=\frac{15\pi+\pi}{3}=5\pi+\frac{\pi}{3}=\boxed{\pi+\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{-3\pi}{4}=\frac{-4\pi+\pi}{4}=-\pi+\frac{\pi}{4}=\boxed{\pi+\frac{\pi}{4}}$$

ب. حساب إحداثيات النقط K ، L ، M

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\,;\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ \Rightarrow \boxed{K(0;1)}$$

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\,;\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{L\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

2. تعيين العنصر (أو العناصر) x من المجال [π ; 2π] في الحالتين الآتيتين :

$$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=2\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{3}}$$

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{x=\frac{5\pi}{4}}$$ أو $$x=2\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{x=\frac{7\pi}{4}}$$

التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ نعتبر النقط $A(-2\,;\,-2)$ ، $B(1\,;\,1)$ ، $C(3\,;\,0)$ و النقطة $E(x\,;\,3)$ حيث x عدد حقيقي.

1. حساب مركبتي كل من الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-2)\\1-(-2)\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-(-2)\\0-(-2)\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-1\\0-1\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}$$

2. تعيين إحداثيي I منتصف القطعة [AC]

$$I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{-2+3}{2};\frac{-2}{2}\right)\Rightarrow\boxed{I\left(\frac{1}{2};-1\right)}$$

3. اثبات أنّ النقط A ، B ، O على استقامية

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OB}\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مرتبطين خطيا

منه ، نستنتج أنّ النقط A ، B ، O على استقامية

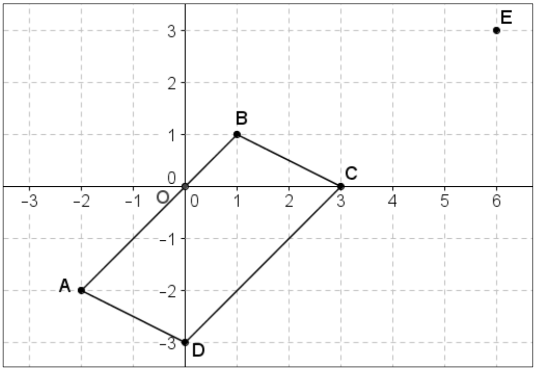
4. تعيين إحداثيي النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}3-x_D\\-y_D\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\begin{cases}3-x_D=3\\-y_D=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x_D=0\\y_D=-3\end{cases}}$$

5. تعيين قيمة العدد الحقيقي x حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطين خطيا

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x-3\\3\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}\Rightarrow(3\times3)-3(x-3)=0$$

$$\Rightarrow-3x+18=0\Rightarrow x=6\Rightarrow\boxed{E(6;3)}$$



التمرين الثالث :

1) $f(x) = -2(x-1)^2 + 1$

أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $f(x) - f(1) \le 0$

$f(1) = 1 \Rightarrow f(x) - f(1) = -2(x-1)^2 + 1 - 1 = -2(x-1)^2$

$(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow -2(x-1)^2 \le 0 \Rightarrow \boxed{f(x) - f(1) \le 0}$

استنتاج أكبر قيمة ممكنة للدالة f

$f(x) - f(1) \le 0 \Rightarrow f(x) \le f(1) \Rightarrow \boxed{f(x) \le 1}$

نستنتج أنّ أكبر قيمة ممكنة للدالة f هي 1

ب. تعيين صورة كل من 1- و 0 بالدالة f

$f(-1) = -2(-1-1)^2 + 1 = -2 \times 4 + 1 = -8 + 1 \Rightarrow \boxed{f(-1) = -7}$

$f(0) = -2(-1)^2 + 1 = -2 \times 1 + 1 = -2 + 1 \Rightarrow \boxed{f(0) = -1}$

ج. تعيين السوابق الممكنة للعدد 1- بالدالة f

$f(x) = -1 \Rightarrow -2(x-1)^2 + 1 = -1 \Rightarrow -2(x-1)^2 = -2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1$

$\Rightarrow x - 1 = -1$ أو $x - 1 = 1 \Rightarrow$ $\boxed{x = 0 \text{ أو } x = 2}$

2) $g(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ ، $D_g =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

أ. دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجالين $]-\infty ; 3[$ و $]3 ; +\infty[$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $]-\infty; 3[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$x_1 < x_2 < 3 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 3} > \frac{1}{x_2 - 3}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{x_1 - 3} > 2 + \frac{1}{x_2 - 3} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

منه، الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty; 3[$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $]3; +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$3 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 3} > \frac{1}{x_2 - 3}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{x_1 - 3} > 2 + \frac{1}{x_2 - 3} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

منه، الدالة g متناقصة على المجال $]-1; +\infty[$.

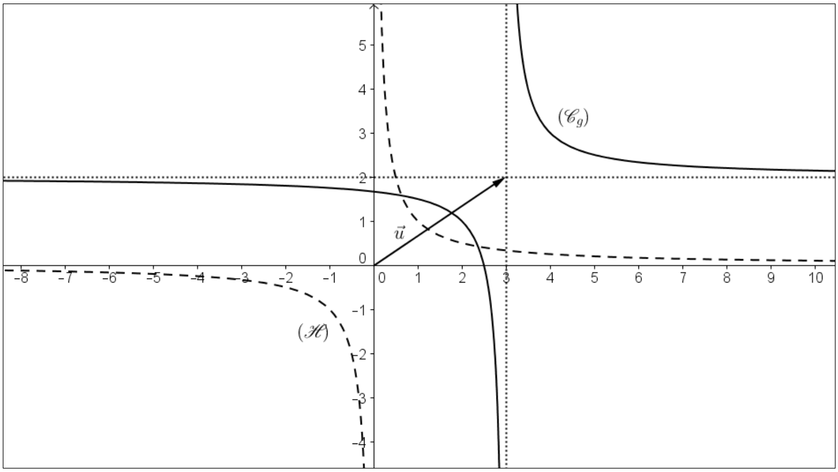
ب. جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

ج. **بيان أنّه يمكن استنتاج المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{H})$ الممثل للدالة المرجعية مقلوب**

بما أنّ $g(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ هو انسحاب للمنحنى $(\mathscr{H})$ وفق الشعاع $\vec{u}(3;2)$

د. **انشاء $(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{H})$**



ه. **حلّ بيانيا المتراجحة : $g(x) > 2$**

$g(x) > 2 \Rightarrow \boxed{x \in]3;+\infty[}$

التمرين الرابع :

$$\boldsymbol{p(x) = x^3 - 8x^2 - 25x + 200}$$

1. **بيان من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $p(x) = (x+5)(x^2 - 13x + 40)$**

$$(x+5)(x^2-13x+40) = x^3 - 13x^2 + 40x + 5x^2 - 65x + 200$$
$$= x^3 - 8x^2 - 25x + 200$$
$$= p(x)$$

2. **حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 13x + 40 = 0$**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(1)(40) = 169 - 160 = 9$$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-3}{2} = \boxed{5}$ ، $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+3}{2} = \boxed{8}$

استنتاج مجموعة حلول المعادلة : $p(x) = 0$

$p(x) = 0$ معناه $x + 5 = 0$ أو $x^2 - 13x + 40 = 0$ أي $x = -5$ أو $x = 5$ أو $x = 8$ ، ومنه : $\boxed{S = \{-5;5;8\}}$

3. $\boldsymbol{E(x) = x^2 - 13x + 40}$

أ. تحليل العبارة $\boldsymbol{E(x)}$ الى جداء عاملين

$$\boxed{E(x) = (x-5)(x-8)}$$

ب. حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة $\boldsymbol{E(x) \geq 0}$

بما أنّ العبارة $E(x)$ تنعدم عند 5 و 8، ومعامل x^2 موجب $(a = 1)$

فحلول المتراجحة $E(x) \geq 0$ هي : $\boxed{S =]-\infty; 5] \cup [8; +\infty[}$

(العبارة $E(x)$ موجبة خارج الجذور).

4. **حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة : $\boldsymbol{\frac{p(x)}{x-5} = 0}$**

$\frac{p(x)}{x-5} = 0$ معناه $p(x) = 0$ و $x - 5 \neq 0$ أي $x = -5$ أو $x = 8$ ، ومنه :

$$\boxed{S = \{-5; 8\}}$$

5. **تعيين طول وعرض المستطيل**

ليكن x طول المحيط و y عرضه. لدينا : $\begin{cases} 2(x+y) = 26 \\ xy = 40 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x+y = 13 \\ xy = 40 \end{cases}$

أي $\begin{cases} y = -x + 13 \\ xy = 40 \end{cases}$ ، بتعويض y في المعادلة الثانية نجد $x(-x+13) = 40$

أي $x^2 - 13x + 40 = 0$ وحسب نتيجة السؤال 2 نستنتج أنّ $\boxed{x = 8 \text{ و } y = 5}$

(الحالة $x = 5$ و $y = 8$ مرفوضة لأنّ $x > y$).

الموضوع السادس

التمرين الأول :

1. تعيين $\cos x$ علما أنّ $\sin x = \frac{1}{3}$ و $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

ملاحظة : الحل $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ مرفوض لأنّ $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ أي $\cos x \geq 0$

2. حساب $\sin x$ علما أنّ $\cos x = \frac{4}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = \boxed{-\frac{3}{5}}$$

ملاحظة : الحل $\sin x = \frac{3}{5}$ مرفوض لأنّ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ أي $\sin x \leq 0$

3. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

أ. $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x = \boxed{1 + 2\sin x \cos x}$$

ب. $1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$، حيث $\cos x \neq 0$

$$1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

ج. $1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$، حيث $\sin x \neq 0$

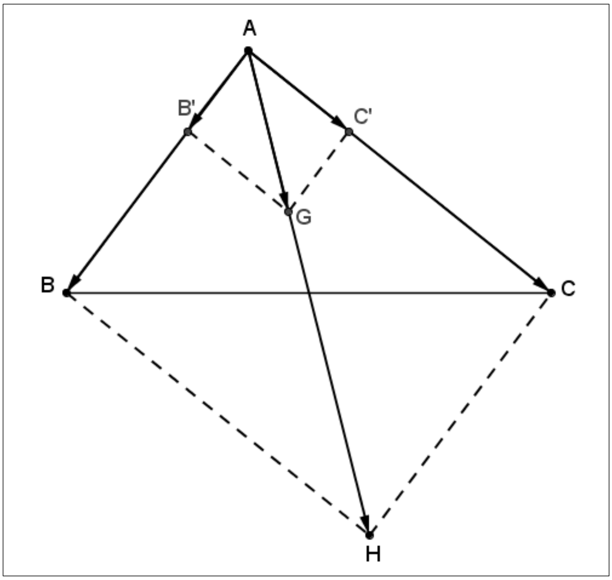
$$1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \boxed{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

التمرين الثاني :

ABC مثلث كيفي.

1. انشاء النقطتين B' و C' حيث : $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2. انشاء النقطتين H و G حيث : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$



3. بيان أنّ النقط A ، H ، G في استقامية

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}}$$

بما أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AG}$ مرتبطان خطّيا ، فإنّ النقط A ، H ، G في استقامية.

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-6x+10$ و (C) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

1. تحقّق أنّ $f(x)=(x-3)^2+1$ من أجل كل عدد حقيقي x

ط ① ... $f(x)=(x-3)^2+1=x^2-6x+9+10=x^2-6x+10$

ط ② ... $f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2-9+10=(x-3)^2+1$

2. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)-f(3)\geq 0$ ، ثمّ استنتاج أصغر قيمة ممكنة للدالة f

$$f(x)-f(3)=(x-3)^2+1-1=(x-3)^2\Rightarrow\boxed{f(x)-f(3)\geq 0}$$

$$f(x)-f(3)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(3)\Rightarrow f(x)\geq 1$$

منه ، نستنتج أنّ الدالة f تقبل قيمة حدّية صغرى تساوي 1.

3. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;3]$ و $[3;+\infty[$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $]-\infty;3]$ حيث $x_1<x_2$. لدينا :

$x_1 < x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2$
$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 1 > (x_2 - 3)^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; 3]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[3; +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$3 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2$
$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 1 < (x_2 - 3)^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $[3; +\infty[$.

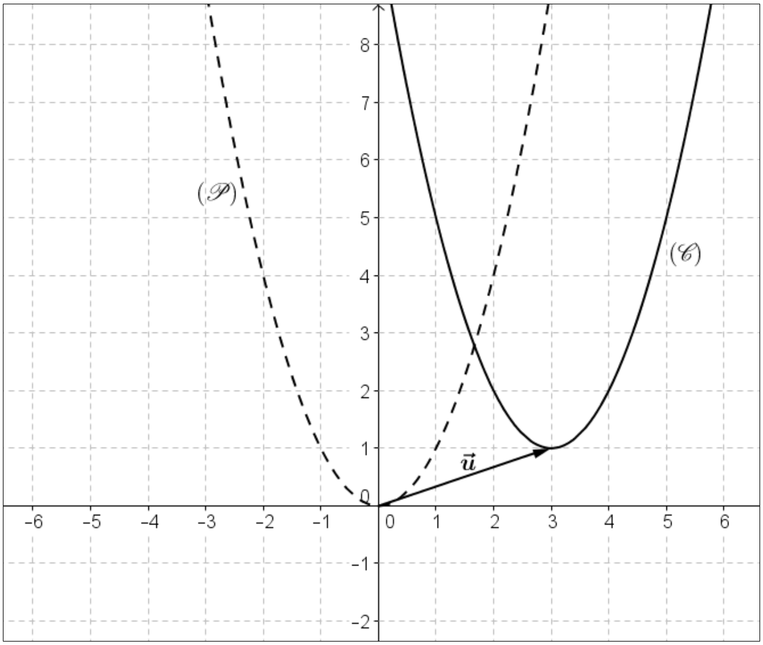
انشاء جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

4. شرح كيف يمكن رسم $(\mathscr{C})$ انطلاقا من $(\mathscr{P})$ المنحنى البياني للدالة مربّع

بما أنّ $f(x) = (x-3)^2 + 1$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C})$ هو انسحاب للمنحنى $(\mathscr{P})$ وفق الشعاع $\vec{u}(3; 1)$.

انشاء $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{P})$



التمرين الرابع :

$\boldsymbol{AB = x + 2}$ ،$\boldsymbol{AC = 3x + 1}$ ،$\boldsymbol{BC = 2x + 3}$

1. **بيان أنّ المثلث ABC يكون قائما في A يكافئ : $3x^2 - x - 2 = 0$**

يكون المثلث ABC قائما في A إذا تحققت العلاقة : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (2x + 3)^2 = (x + 2)^2 + (3x + 1)^2$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = x^2 + 4x + 4 + 9x^2 + 6x + 1$

$\Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 = 10x^2 + 10x + 5$

$\Rightarrow -6x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{3x^2 - x - 2 = 0}$

2. **التحقق أنّ : $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$**

$(x - 1)(3x + 2) = 3x^2 + 2x - 3x - 2 = \boxed{3x^2 - x - 2}$

3. **استنتاج قيمة x بحيث يكون المثلث ABC قائما في A**

$3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(3x + 2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ (القيمة $-\frac{2}{3}$ مرفوضة)

الموضوع السابع

التمرين الأول :

-I

العلامة	$\alpha-4$	$\alpha-2$	$\alpha-1$	α	$\alpha+1$	$\alpha+3$
التواتر	$0{,}1$	$0{,}12$	$0{,}15$	β	$0{,}13$	$0{,}2$

1. تعيين العددين الحقيقيين α و β علما أنّ قيمة الوسط الحسابي هي : $\bar{x}=10,94$

$$0{,}1+0{,}12+0{,}15+\beta+0{,}13+0{,}2=1 \Rightarrow \beta+0{,}7=1 \Rightarrow \boxed{\beta=0{,}3}$$

$$\bar{x}=0{,}1(\alpha-4)+0{,}12(\alpha-2)+0{,}15(\alpha-1)+0{,}3\alpha+0{,}13(\alpha+1)+0{,}2(\alpha+3)=\alpha-0{,}06=10{,}94 \Rightarrow \boxed{\alpha=11}$$

2. تعيين مدى هذه السلسلة

مدى هذه السلسلة هو $\boxed{7}=14-7$

-II

العلامة	$[7;11[$	$[11;13[$	$[13;16[$
عدد التلاميذ	10	11	4
ت م ص	10	21	25
k_i	4	2	3
الارتفاعات	2,5	5,5	1,3

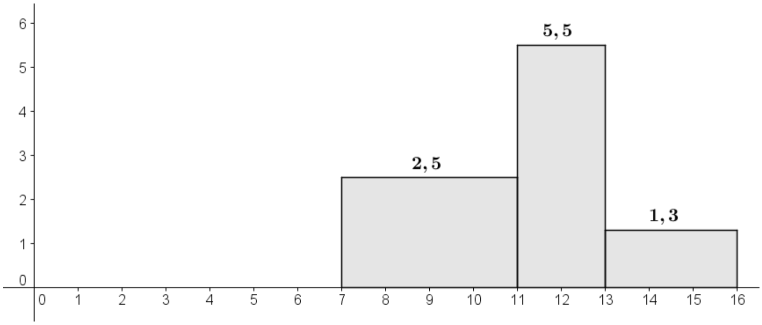
1. اعطاء تقدير m لوسيط هذه السلسلة

بما أنّ التكرار الكلي هو 25 ، فإنّ رتبة الوسيط هي $13=\frac{25+1}{2}$ والفئة الوسيطية هي $[11;13[$ ، ومنه :

$$m=11+\frac{3\times 2}{11}=11+\frac{6}{11}\approx\boxed{11{,}55}$$

حيث تمثل الأعداد 11 ، 3 ، 2 و 11 على الترتيب : الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{11}};13[$، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية ($\mathbf{3}=10-13$)، طول الفئة الوسيطية ($\mathbf{2}=11-13$) وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية.

2. رسم المدرّج التكراري لهذه السلسلة



التمرين الثاني :

1. تعيين $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ حيث : $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}$ و $\alpha\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}\Rightarrow\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=3\Rightarrow\sin^2\alpha=3\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow\sin^2\alpha=3(1-\sin^2\alpha)\Rightarrow4\sin^2\alpha=3\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\boxed{\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow\boxed{\cos\alpha=-\frac{1}{2}}$$

2. ليكن α عددا حقيقيا حيث: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ و $\sin\alpha=\frac{x}{5}$.

تعيين قيم العدد الحقيقي x حتى يكون العدد α موجودا

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{x}{5}\right)^2=1\Rightarrow\frac{16}{25}+\frac{x^2}{25}=1\Rightarrow\frac{x^2+16}{25}=1$$

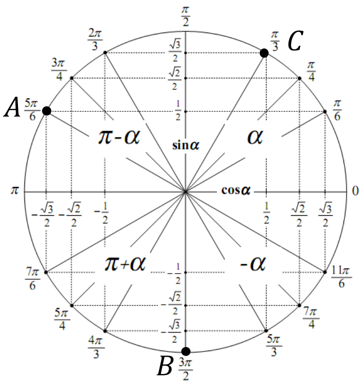
$$\Rightarrow x^2+16=25\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\boxed{x=3 \text{ أو } x=-3}$$

3. تعليم النقط A ، B ، C على الدائرة المثلثية

$$\frac{125\pi}{6}=\frac{120\pi+5\pi}{6}=20\pi+\frac{5\pi}{6}=\boxed{\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{2006\pi}{4}=\frac{2008\pi-2\pi}{4}=502\pi-\frac{2\pi}{4}=\boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1427\pi}{3}=\frac{-1428\pi+\pi}{3}=-476\pi+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\pi}{3}}$$



حساب جيب وجيب تمام كل واحد من هذه الأعداد

$$\cos\frac{125\pi}{6}=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\frac{125\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\frac{2006\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{0}$$

$$\sin\frac{2006\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{-1}$$

$$\cos\left(-\frac{1427\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\left(-\frac{1427\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

التمرين الثالث :

1. **تعيين الوضعية النسبية للمستقيمين (FG)،(BD) و للمستقيمين (AB) ، (CG)**

المستقيمان (FG) و(BD) متوازيان ، و المستقيمان (AB) و(CG) متعامدان

2. **نضع : AM = x و EM + MC = l**

أ. **التعبير عن كل من EM و CM بدلالة x**

$$EM^2=AE^2+AM^2=3^2+x^2\Rightarrow\boxed{EM=\sqrt{9+x^2}}$$

$$CM^2=CB^2+BM^2=4^2+(2-x)^2\Rightarrow\boxed{CM=\sqrt{16+(2-x)^2}}$$

ب. استنتاج أنّ: $l = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(2-x)^2}$

$$l = EM + CM \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(2-x)^2}}$$

3. بيان أنّه من أجل كل وضعية للنقطة M على [AB] ، تكون مساحة المثلث EFM ثابتة (مستقلة عن x)

$$S_{EFM} = \frac{EF \times BF}{2} = \frac{AB \times AE}{2} = \frac{2 \times 3}{2} \Rightarrow \boxed{S_{EFM} = 3\ cm^2}$$

4. حساب حجم متوازي المستطيلات ABCDEF

$$\mathcal{V}_{ABCDEF} = AB \times AD \times AE = 2 \times 4 \times 3 \Rightarrow \boxed{\mathcal{V}_{ABCDEF} = 24\ cm^3}$$

التمرين الرابع :

1. $A(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2$

- **تبسيط $A(x)$ وحلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $A(x) = 0$**

$$A(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2 = x^2 - 9 - 2(x^2 + 6x + 9)$$

$$A(x) = x^2 - 9 - 2x^2 - 12x - 18 \Rightarrow \boxed{A(x) = -x^2 - 12x - 27}$$

$$A(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 12x - 27 = 0$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4(-1)(-27) = 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{12-6}{-2} = -3\ ;\ x_2 = \frac{12+6}{-2} = -9\ ;\boxed{S = \{-3; -9\}}$$

- **تحليل $A(x)$ وحلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $A(x) > 0$**

$$A(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2 = (x-3)(x+3) - 2(x+3)^2$$

$$A(x) = (x+3)[(x-3) - 2(x+3)] = (x+3)(x - 3 - 2x - 6)$$

$$\boxed{A(x) = (x+3)(-x-9)}$$

ملاحظة : يمكننا الحصول على هذه النتيجة باستعمال حلول المعادلة $A(x) = 0$:

$$\boxed{A(x) = -(x+3)(x+9)}$$

$$A(x) > 0 \Rightarrow \boxed{x \in]-9; -3[}$$

2. $B(x) = 2x^2 + 12x + 18$

- **حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $B(x) = 0$ ، واستنتاج تحليل لـ $B(x)$**

$$B(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0$$

$$\Delta = (12)^2 - 4(2)(18) = 0\ ; x_1 = x_2 = \frac{-12}{4} = -3\ ; \boxed{S = \{-3\}}$$

$$\boxed{B(x) = 2(x+3)^2}$$

3. $E(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

- **تعيين D مجموعة قيم x من $\mathbb{R}$ بحيث يكون للعبارة $E(x)$ معنى**

$D = \{x \in \mathbb{R}, B(x) \neq 0\} \Rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} - \{-3\}}$

- **تبسيط $E(x)$ وحلّ في D المتراجحة $E(x) \leq 0$**

$$E(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{-(x+3)(x+9)}{2(x+3)^2} \Rightarrow \boxed{E(x) = -\frac{x+9}{2(x+3)}}$$

$x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 \,; x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

x	$-\infty$		-9		-3		$+\infty$
$x+9$		-	0	+		+	
$x+3$		-		-	0	+	
$-\frac{x+9}{2(x+3)}$		-	0	+	‖	-	

$E(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \,]-\infty; -9] \cup \,]-3; +\infty[}$

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل :

1. **لا يوجد أي عدد حقيقي x حيث $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$: صحيح**

$-1 \leq \cos x \leq 1$ و $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1$

2. **x عدد حقيقي من المجال $[0\,;\,\pi]$. $\cos x \geq \frac{1}{2}$ تكافئ $x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$: خطأ**

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$$

3. أ) **$\sin(\pi - x) = \sin x$: صحيح**

ب) **$\cos(\pi + x) = \cos x$: خطأ**

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

ج) **$\sin(5\pi + x) = \sin x$: خطأ**

$$\sin(5\pi + x) = \sin(4\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$$

4. **a و b عنصران من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. إذا كان $a < b$ فإنّ $\cos a < \cos b$: خطأ**

$a < b \Rightarrow \cos a > \cos b$ (الدالة $\cos x$ متناقصة على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

5. **a و b عنصران من $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$. إذا كان $a < b$ فإنّ $\cos\left(\frac{1}{b}\right) < \cos\left(\frac{1}{a}\right)$: صحيح**

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{a}\right) < \cos\left(\frac{1}{b}\right)$$

التمرين الثاني :

1. **حساب عدد الرياضيين الذين أعمارهم 16 سنة**

$$n = 22 - (5 + 3 + 8) = 22 - 16 \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

2. **حساب النسبة المئوية للرياضيين الذين أعمارهم 15 سنة**

$$p = \frac{3}{22} \times 100 \approx \boxed{13{,}64\ \%}$$

3. **حساب متوسط العمر لكل الرياضيين**

$$\bar{x} = \frac{(14 \times 5) + (15 \times 3) + (16 \times 6) + (17 \times 8)}{22} = \frac{347}{22} \approx \boxed{15{,}77}$$

حساب العمر الوسيط

الأعمار	14	15	16	17
التكرار	5	3	6	8
التكرار المجمع الصاعد	5	8	14	22

بما أنّ التكرار الكلي هو 22 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 11 و 12 ، ومنه :

$$\boxed{Med = 16}$$

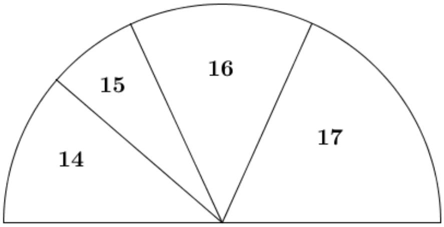
4. اكمال الجدول:

الأعمار	14	15	16	17	المجموع
التكرار	5	3	6	8	22
قيس الزاوية بالدرجة	40,9	24,5	49,1	65,5	180

$$14 \to \frac{5}{22} \times 180 = 40{,}9° \quad ; \quad 15 \to \frac{3}{22} \times 180 = 24{,}5°$$

$$16 \to \frac{6}{22} \times 180 = 49{,}1° \quad ; \quad 17 \to \frac{8}{22} \times 180 = 65{,}5°$$

5. رسم مخطط نصف دائري يمثل فئات أعمار الرياضيين



التمرين الثالث :

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{4}{x}} \text{ ، } \boldsymbol{h(x) = x + 3} \text{ ، } \boldsymbol{f(x) = x^2 - x}.$$

1. كتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي

$$f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

استنتاج القيمة الحدية الصغرى للدالة f

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{f(x) \geq -\frac{1}{4}}$$

نستنتج أنّ القيمة الحدّية الصغرى للدالة f هي $-\frac{1}{4}$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2} ; +\infty[$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 - \frac{1}{2} < x_2 - \frac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 > \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - \frac{1}{2} < x_2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < \left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

.3

أ. حلّ بيانيا المتراجحتين : $\frac{4}{x} \geq x^2 - x$ و $\frac{4}{x} \leq x + 3$

$$\frac{4}{x} \geq x^2 - x \Rightarrow g(x) \geq f(x) \Rightarrow \boxed{x \in]0; 2]}$$

$$\frac{4}{x} \leq x + 3 \Rightarrow g(x) \leq h(x) \Rightarrow \boxed{x \in [-4; 0[\cup [1; +\infty[}$$

ب. استنتاج مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث : $x^2 - x \leq \frac{4}{x} \leq x + 3$

$$x^2 - x \leq \frac{4}{x} \leq x + 3 \Rightarrow x \in]0; 2] \cap ([-4; 0[\cup [1; +\infty[) \Rightarrow \boxed{x \in [1; 2]}$$

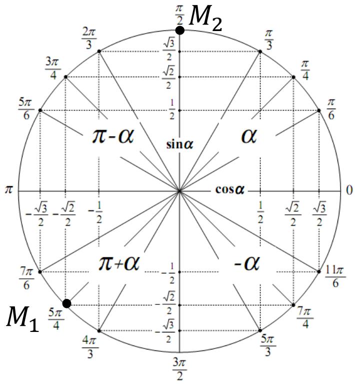
الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. **تعيين على الدائرة المثلثية النقطتين M_1 و M_2**

$$\frac{21\pi}{4}=\frac{20\pi+\pi}{4}=5\pi+\frac{\pi}{4}=4\pi+\pi+\frac{\pi}{4}=\boxed{\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}}$$

$$\frac{17\pi}{2}=\frac{16\pi+\pi}{2}=8\pi+\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$



2. **حساب القيم المضبوطة لـ: $\cos\frac{21\pi}{4}$ ، $\sin\frac{21\pi}{4}$ ، $\cos\frac{17\pi}{2}$ و $\sin\frac{17\pi}{2}$**

$$\cos\frac{21\pi}{4}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin\frac{21\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\frac{17\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{2}=\boxed{0}$$

$$\sin\frac{17\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=\boxed{1}$$

3. **بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x حيث : $\sin x\neq 0$ و $\cos x\neq 0$ ، لدينا :**

$$1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x} \quad \text{و} \quad 1+\frac{1}{\tan^2x}=\frac{1}{\sin^2x}$$

$$1+\tan^2x=1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\boxed{\frac{1}{\cos^2x}}$$

$$1+\frac{1}{tan^2x}=\frac{\tan^2 x+1}{\tan^2 x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1}{\cos^2 x}\times\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\boxed{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

4. حساب $\cos x$ و $\sin x$ إذا كان $\tan x = -2$ على المجال $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$\tan x=-2\Rightarrow tan^2x=4\Rightarrow 1+tan^2x=5\Rightarrow\frac{1}{\cos^2 x}=5$$

$$\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos x=\boxed{-\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\tan x=-2\Rightarrow tan^2x=4\Rightarrow 1+\frac{1}{tan^2x}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow\sin^2 x=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin x=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

التمرين الثاني :

$$\boldsymbol{A(x)=4x^2-9+(2x+3)(3x-4)}$$

1. تحليل العبارة $A(x)$

$$A(x)=4x^2-9+(2x+3)(3x-4)$$
$$A(x)=(2x-3)(2x+3)+(2x+3)(3x-4)$$
$$A(x)=(2x+3)[(2x-3)+(3x-4)]=\boxed{(2x+3)(5x-7)}$$

نشر وتبسيط العبارة $A(x)$

$$A(x)=(2x+3)(5x-7)=10x^2-14x+15x-21=\boxed{10x^2+x-21}$$

2. حساب $A(0)$ و $A(-1)$

$$\boxed{A(0)=-21}\,;A(-1)=10(-1)^2+(-1)-21\Rightarrow\boxed{A(-1)=-12}$$

3. $E(x)=\frac{A(x)}{4x^2-9}$

أ. تعيين مجموعة x التي تكون من أجلها معنى لـ E(x)

$D_E=\{x\in\mathbb{R}\,;\ x^2-9\neq 0\}\,;\ x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=-3$ أو $x=3$

$$\Rightarrow\boxed{D_E=\mathbb{R}-\{-3;3\}}$$

ب. اختزال العبارة $E(x)$

$$E(x)=\frac{A(x)}{4x^2-9}=\frac{(2x+3)(5x-7)}{(2x+3)(2x-3)}=\boxed{\frac{5x-7}{2x-3}}$$

ج. حل المعادلتين : $E(x) = 0$ و $E(x) = 1$

$$E(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x-7}{2x-3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-7=0 \\ x \in D_E \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{5} \Rightarrow \boxed{S_1 = \left\{\frac{7}{5}\right\}}$$

$$E(x) = 1 \Rightarrow \frac{5x-7}{2x-3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 5x-7=2x-3 \\ x \in D_E \end{cases} \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2 = \left\{\frac{4}{3}\right\}}$$

د. حلّ المتراجحة : $E(x) \leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x-7$		-	0	+		+	
$2x-3$		-		-	0	+	
$\frac{5x-7}{2x-3}$		+	0	-	‖	+	

$$E(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \left[\frac{7}{5}; \frac{3}{2}\right[}$$

4. $F(x) = x^2 + x - 6$

أ. كتابة العبارة F على الشكل النموذجي

$$F(x) = x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 \Rightarrow \boxed{F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$$

ب. حل المعادلة : $F(x) = 0$

$$F(x) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \text{ أو } x + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ أو } x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -3 \text{ أو } x = 2 \Rightarrow \boxed{S = \{-3; 2\}}$$

ج. تحليل العبارة F إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى ثمّ دراسة إشارتها

$$F(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)$$

$$\boxed{F(x) = (x-2)(x+3)}$$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$F(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[: F(x) > 0$
- $x \in]-3; 2[: F(x) < 0$
- $x \in \{-3; 2\} : F(x) = 0$

التمرين الثالث :

1. حساب مساحة المثلث BEF بدلالة x

$$\mathcal{S}_{BEF} = \frac{BE \times BF}{2} = \frac{x(4-x)}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_{BEF} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x}$$

2. نرمز بـ $f(x)$ إلى مساحة الجزء المظلل من الشكل

أ. تعيين مجموعة قيم x التي تمسحها النقطة F

$$x \in [0; 4]$$

ب. بيان أنّ: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 8$

$$f(x) = \mathcal{S}_{ABC} - \mathcal{S}_{BEF} = 8 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) = \boxed{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 8}$$

ج. اثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 6$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 6 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 6 = \boxed{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 8}$$

د. دراسة تغيرات الدالة f على المجالين [0 ; 2] و [2 ; 4]

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $[0; 2]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + 6 > \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 + 6 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $[0; 2]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[2; 4]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$2 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1-2)^2+6<\frac{1}{2}(x_2-2)^2+6 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $[2;4]$.

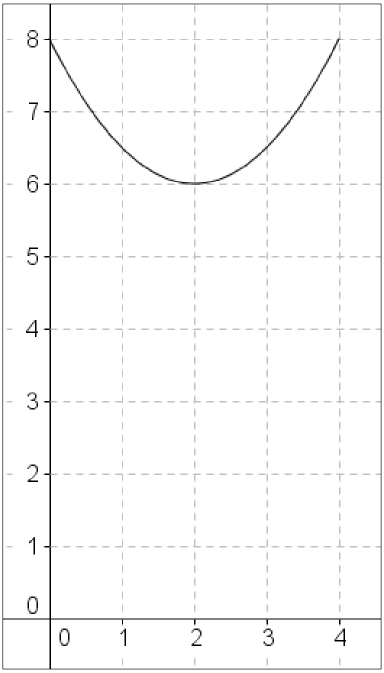
جدول تغيرات الدالة f

x	0		2		4
$f(x)$	8	↘	6	↗	8

ه. حساب صور الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 بالدالة f

$f(0)=8$ ، $f(1)=\frac{13}{2}$ ، $f(2)=6$ ، $f(3)=\frac{13}{2}$ ، $f(4)=8$

رسم تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس



3. تعيين موضع النقطتين E و F حيث تكون مساحة الشكل المظلل أصغر ما يمكن

تكون مساحة الشكل المظلل أصغر ما يمكن من أجل $x=2$ ، أي عندما تكون E منتصف $[AB]$ و F منتصف $[BC]$

4. تعيين قيّم x بحيث تكون $f(x)=6\ cm$

$$f(x)=6 \Rightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2+6=6 \Rightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2=0 \Rightarrow (x-2)^2=0$$

$$\Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

التمرين الرابع :

1. تعيين x

$$x^2+2x+x+7+5=30 \Rightarrow x^2+3x-18=0$$

$$\Delta= 3^2-4(-18)=81 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=9$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-9}{2}=-6 \ (\text{قيمة مرفوضة لأنّ } x>0)$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+9}{2}=3 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

2. نضع : $x=3$

أ. اكمال الجدول

الأوزان(Kg)	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	$[20;25[$
التكرارات	5	9	6	10
مراكز الفئات	7,5	12,5	17,5	22,5
ت م ص	5	14	20	30
ت م ن	30	25	16	10

ب. حساب الوسط الحسابي

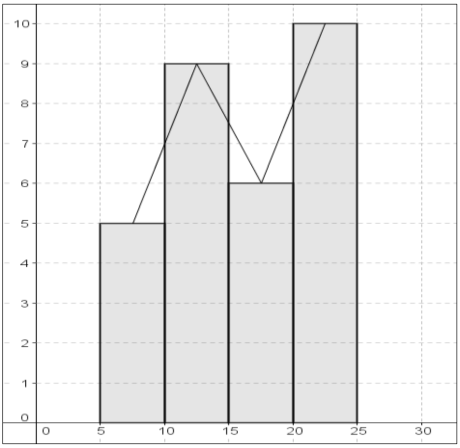
$$\bar{x}=\frac{(7{,}5\times 5)+(12{,}5\times 9)+(17{,}5\times 6)+(22{,}5\times 10)}{30}=\frac{480}{30}=\boxed{16}$$

ج. استنتاج الفئة المنوالية والفئة الوسيطية

الفئة المنوالية هي $[20;25[$

بما نّ التكرار الكلّي $N=30$ ، فإنّ رتبة الوسيط هي 15 ، ومنه الفئة الوسيطية هي $[15;20[$

د. تمثيل معطيات السلسلة بالمدرج التكراري والمضلع التكراري



الموضوع العاشر

التمرين الأول :

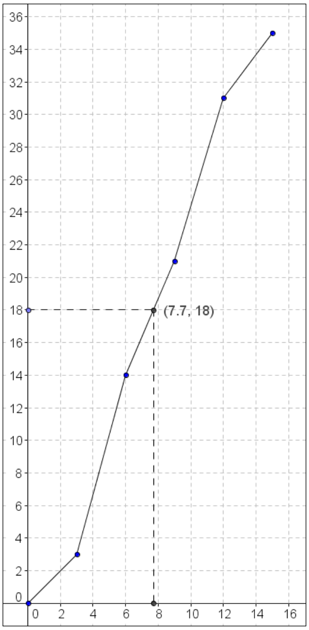
1. المنحنى الممثّل للدالة مربّع متناظر بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : أ) $x = 0$
2. الدالة مقلوب معرّفة على : ب) $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
3. المنحنى الممثّل للدالة مقلوب متناظر بالنسبة إلى النقطة : أ) $O(0 ; 0)$
4. f دالة معرّفة على المجال $I =]-4 ; 4[$. نقول إن الدالة f فردية إذا تحقّق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I: أ) $f(x) + f(-x) = 0$

التمرين الثاني :

1. **اكمال الجدول**

عدد الساعات	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[
التكرارات	3	11	7	10	4
مراكز الفئات	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5
ت م ص	3	14	21	31	35

2. **انشاء مضلّع التكرارات المجمعة الصاعدة واستنتاج بيانيا قيمة الوسيط**



قيمة الوسيط بيانيا هي فاصلة النقطة التي ترتيبها

رتبة الوسيط (18) ، ومنه : $\boxed{Med \approx 7{,}7}$

3. **حساب الوسط الحسابي و الوسيط**

$$\bar{x} = \frac{(1{,}5 \times 3) + (4{,}5 \times 11) + (7{,}5 \times 7) + (10{,}5 \times 10) + (13{,}5 \times 4)}{35}$$

$$\bar{x} = \frac{265{,}5}{35} \approx \boxed{7{,}6}$$

بما أنّ التكرار الكلي هو 35 ، فإنّ رتبة الوسيط هي

$\frac{35+1}{2} = 18$ والفئة الوسيطية هي $[6; 9[$ ، ومنه :

$$Med = 6 + \frac{4 \times 3}{7} = 6 + \frac{12}{7} \approx \boxed{7{,}7}$$

4. **حساب النسبة المئوية للتلاميذ الذين يستعملون الانترنت أقل من 6 ساعات**

$$p = \frac{14}{35} \times 100 = \boxed{40\ \%}$$

التمرين الثالث :

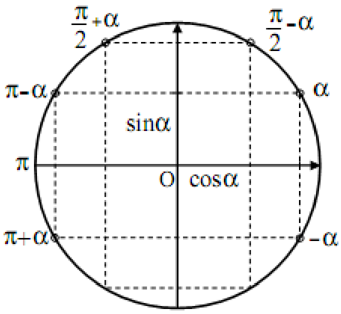
1. تبسيط العبارات التالية :

أ. $\mathbf{\cos(x+\pi) - 2\sin(x-\pi) + 2\cos(x-\pi) + \sin(x+\pi)}$

$$\cos(x+\pi) - 2\sin(x-\pi) + 2\cos(x-\pi) + \sin(x+\pi)$$
$$= \underbrace{\cos(\pi+x)}_{-\cos x} + 2\,\underbrace{\sin(\pi-x)}_{\sin x} + 2\,\underbrace{\cos(\pi-x)}_{-\cos x} + \underbrace{\sin(\pi+x)}_{-\sin x}$$
$$= -\cos x + 2\sin x - 2\cos x - \sin x$$
$$= \boxed{-3\cos x + \sin x}$$

ب. $\mathbf{3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)}$

$$3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}_{\frac{3\pi}{2}=\frac{4\pi-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)}_{\frac{15\pi}{2}=\frac{16\pi-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\cos\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)}_{\frac{13\pi}{2}=\frac{12\pi+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}}$$
$$= 3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$= 3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$= 2\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}_{-\sin x} + 2\,\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sin x}$$
$$= -2\sin x + \sin x = \boxed{-\sin x}$$



2. اثبات صحة المساويات التالية :

أ. $\mathbf{2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x}$

$$2\cos^2 x - 1 = 2(1-\sin^2 x) - 1 = 2 - 2\sin^2 x - 1 = \boxed{1 - 2\sin^2 x}$$

ب. $\mathbf{(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2}$

$$(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x . \sin x = 1 + 2\cos x . \sin x$$
$$(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x . \sin x = 1 - 2\cos x . \sin x$$
$$\boxed{(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2}$$

ج. $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$

$$\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = \underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{1-2\cos^2 x}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} + 2\cos^2 x$$

$$= 1 - 2\cos^2 x + 2\cos^2 x = \boxed{1}$$

التمرين الرابع :

1. تعيين القيم الممكنة لـ x

$$0 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \boxed{x \in [0;2]}$$

2. التعبير بدلالة x عن :

أ. الطول CD والطول CF

$$\boxed{CD = 4 - 2x\,; CF = 6 - 2x}$$

ب. مساحة المستطيل CDEF

$$\mathcal{S}_{CDEF} = CD \times CF = (4-2x)(6-2x) \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_{CDEF} = 4x^2 - 20x + 24}$$

ج. مساحة المثلث ABG

$$\mathcal{S}_{ABG} = \frac{6 \times 2x}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{S}_{ABG} = 6x}$$

3. اثبات أنّ مساحة الشكل المعطى هي: $f(x) = 4x^2 - 14x + 24$

$$f(x) = \mathcal{S}_{CDEF} + \mathcal{S}_{ABG} = 4x^2 - 20x + 24 + 6x = \boxed{4x^2 - 14x + 24}$$

4. كتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي

$$f(x) = 4x^2 - 14x + 24 = 4\left(x^2 - \frac{7}{2}x + 6\right) = 4\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + 6\right]$$

$$= 4\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}\right] = \boxed{4\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{4}}$$

5. تعيين اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0\,;2]$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $\left[0;\frac{7}{4}\right]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$x_1 < x_2 \leq \frac{7}{4} \Rightarrow x_1 - \frac{7}{4} < x_2 - \frac{7}{4} \leq 0 \Rightarrow \left(x_1 - \frac{7}{4}\right)^2 > \left(x_2 - \frac{7}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(x_1 - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{4} > 4\left(x_2 - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{4} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $\left[0;\frac{7}{4}\right]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $\left[\frac{7}{4};2\right]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$\frac{7}{4} \le x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \le x_1 - \frac{7}{4} < x_2 - \frac{7}{4} \Rightarrow \left(x_1 - \frac{7}{4}\right)^2 < \left(x_2 - \frac{7}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(x_1 - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{4} < 4\left(x_2 - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{47}{4} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $\left[\frac{7}{4}; 2\right]$.

جدول تغيرات الدالة f

x	0		$\frac{7}{4}$		2
$f(x)$	24	$\searrow$	$\frac{47}{4}$	$\nearrow$	12

6. استنتاج قيمة x التي تكون من أجلها مساحة الشكل المعطى أصغر ما يمكن

تكون مساحة الشكل المعطى أصغر ما يمكن من أجل $x = \frac{7}{4}$

7. تعيين قيم x حتى تكون :

أ. $f(x) = 14\ cm^2$

$$f(x) = 14 \Rightarrow 4x^2 - 14x + 24 = 14 \Rightarrow 4x^2 - 14x + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(4)(10) = 36$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 - 6}{8} = 1\ ;\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 + 6}{8} = \frac{5}{2}$$

بما أنّ $x \in [0; 2]$ ، فحل المعادلة $f(x) = 14$ هو $\boxed{S = \{1\}}$

ب. $f(x) \le 12\ cm^2$

$$f(x) \le 12 \Rightarrow 4x^2 - 14x + 24 \le 12 \Rightarrow 4x^2 - 14x + 12 \le 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(4)(12) = 4$$

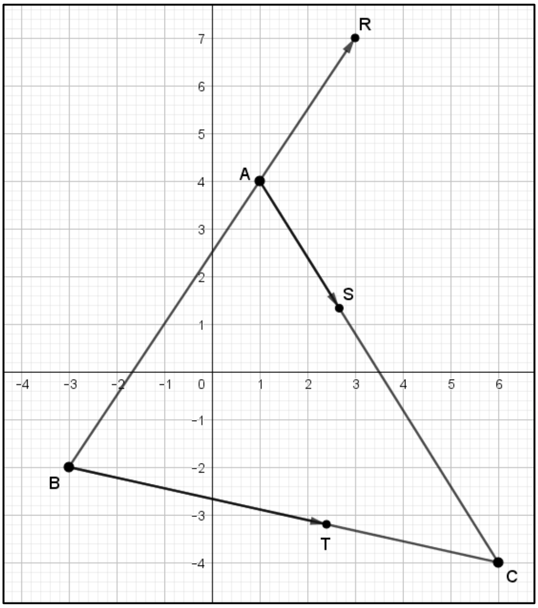
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 - 2}{8} = \frac{3}{2}\ ;\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 + 2}{8} = 2$$

حلول المتراجحة $f(x) \le 12$ هي $\boxed{S = \left[\frac{3}{2}; 2\right]}$

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول :

1. رسم الشكل.



2. بيان أنّ: $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AS}=-\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AS}=\boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$$

$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\boxed{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$$

3. التعبير عن الشعاع $\overrightarrow{RT}$ بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AT}=-\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\boxed{\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$$

4. التحقق أنّ: $\overrightarrow{RS}=\frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$.

$$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{5}{9}\left(\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\boxed{\frac{5}{9}\overrightarrow{RT}}$$

بما أنّ الشعاعين $\overrightarrow{RS}$ و$\overrightarrow{RT}$ مرتبطان خطيا نستنتج أنّ النقط R ، S ، T في استقامية.

التمرين الثاني :

1. اكمال الجدول.

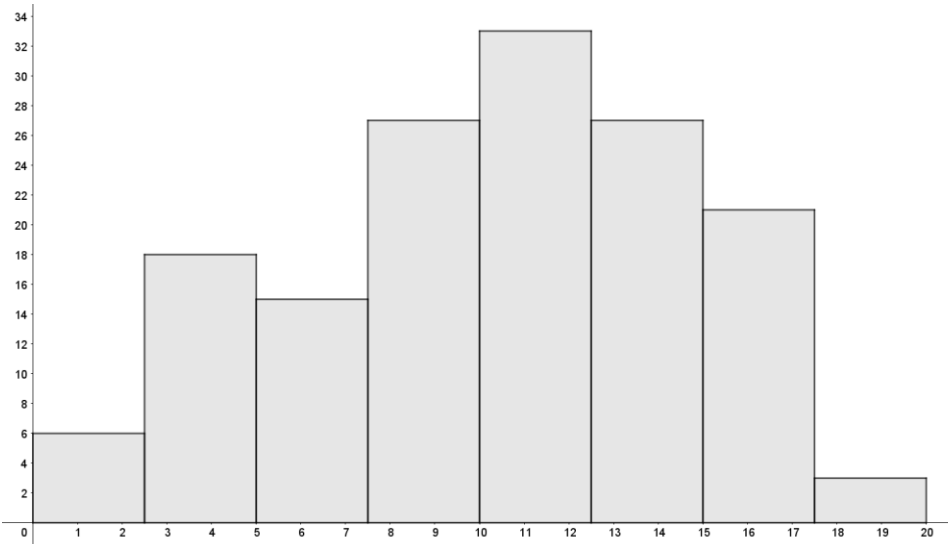
الفئات	$[0;2,5[$	$[2,5;5[$	$[5;7,5[$	$[7,5;10[$	$[10;12,5[$	$[12,5;15[$	$[15;17,5[$	$[17,5;20[$
التكرار	6	18	15	27	33	27	21	3
ت.م.ص	6	24	39	66	99	126	147	150
التواتر	0,04	0,12	0,1	0,18	0,22	0,18	0,14	0,02

2. حساب العلامة الوسيطية Med.

بما أنّ $N = 150$ فإنّ رتبة الوسيط هي 75 ومنه الفئة الوسيطية هي $[10;12,5[$

$$Med = 10 + \frac{24 \times 2,5}{33} \approx \boxed{11,82}$$

3. انشاء المدرج التكراري لهذا التوزيع.



4. تعيين عدد الطلبة الذين تحصلوا على علامة أكبر من أو تساوي 10 في مادة الرياضيات ولم ينجحوا.

عدد الطلبة الذين تحصلوا على علامة أكبر من أو تساوي 10 في مادة الرياضيات هو: $150 - 66 = 84$، نجح من بينهم 75، منه نستنتج أنّ عدد الطلبة الذين تحصلوا على علامة أكبر من أو تساوي 10 في مادة الرياضيات ولم ينجحوا هو: $84 - 75 = 9$.

التمرين الثالث :

$$P(x) = x^2 - 4x + 4 - (2x-4)(x+1)$$

1. تحليل $P(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

$$P(x) = x^2 - 4x + 4 - (2x-4)(x+1) = (x-2)^2 - 2(x-2)(x+1)$$
$$= (x-2)[(x-2) - 2(x+1)] = \boxed{(x-2)(-x-4)}$$

2. **حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.**

$$P(x)=0 \Rightarrow (x-2)(-x-4)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x-2=0 \\ \text{أو} \\ -x-4=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=2 \\ \text{أو} \\ x=-4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\{-4;2\}}$$

3. **حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $-x^2-2x+8=0$**

$$\Delta=(-2)^2-4(-1)(8)=36\ ;\ x_1=\frac{2+6}{-2}=-4\ ;\ x_2=\frac{2-6}{-2}=2$$

$$\boxed{S=\{-4;2\}}$$

استنتاج حلول المعادلة $-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1-\frac{1}{x}\right)+8=0$

نضع: $X=1-\frac{1}{x}$.

$$-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(1-\frac{1}{x}\right)+8=0 \Rightarrow -X^2-2X+8=0$$

$$\Rightarrow X=-4 \text{ أو } X=2 \Rightarrow 1-\frac{1}{x}=-4 \text{ أو } 1-\frac{1}{x}=2 \Rightarrow \frac{1}{x}=5 \text{ أو } \frac{1}{x}=-1$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{5} \text{ أو } x=-1 \Rightarrow \boxed{S=\left\{-1;\frac{1}{5}\right\}}$$

التمرين الرابع :

1. **بيان أنّ عبارة مساحة الجزء المظلل هي: $g(x)=-x^2+4x+32$.**

مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة المربّع ناقص مساحة الجزء غير المظلل، ومنه:

$$g(x)=64-\left(x^2+\frac{8(8-x)}{2}\right)=64-(x^2+32-4x)$$

$$\boxed{g(x)=-x^2+4x+32}$$

2. **تعيين قيم x التي من أجلها تكون مساحة الجزء المظلل تساوي مساحة الجزء غير المظلل.**

$$-x^2+4x+32=x^2-4x+32 \Rightarrow 2x^2-8x=0 \Rightarrow 2x(x-4)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0 \text{ أو } x=4}$$

3. **تعيين قيم x التي من أجلها تكون مساحة الجزء المظلل أصغر أو تساوي $32cm^2$.**

$$-x^2+4x+32 \le 32 \Rightarrow -x^2+4x \le 0 \Rightarrow -x(x-4) \le 0$$

x	0		4		8
$-x$	0	$-$		$-$	
$x-4$		$-$	0	$+$	
$-x(x-4)$	0	$+$	0	$-$	

$g(x) \leq 32 \Rightarrow x \in [4;8]$

4. أ. التحقق أنّه من أجل كل x من المجال $[0;8]$: $g(x) = -(x-2)^2 + 36$.

$g(x) = -(x-2)^2 + 36 = -(x^2 - 4x + 4) + 36 = \boxed{-x^2 + 4x + 32}$

ب. تحليل العبارة إلى جداء عاملين.

$g(x) = 36 - (x-2)^2 = [6-(x-2)][6+(x-2)]$

$\boxed{g(x) = (-x+8)(x+4)}$

ج. دراسة اتجاه تغيّر الدالة g على كل من المجالين $[0;2]$ و $[2;8]$

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $[0;2]$ حيث $a < b$. لدينا :

$0 \leq a < b \leq 2 \Rightarrow -2 \leq a-2 < b-2 \leq 0 \Rightarrow (a-2)^2 > (b-2)^2$

$\Rightarrow -(a-2)^2 < -(b-2)^2 \Rightarrow -(a-2)^2 + 36 < -(b-2)^2 + 36$

$\Rightarrow g(a) < g(b) \Rightarrow$ $\boxed{\text{الدالة } g \text{ متزايدة على المجال } [0;2]}$

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $[2;8]$ حيث $a < b$. لدينا :

$2 \leq a < b \leq 8 \Rightarrow 0 \leq a-2 < b-2 \leq 6 \Rightarrow (a-2)^2 < (b-2)^2$

$\Rightarrow -(a-2)^2 > -(b-2)^2 \Rightarrow -(a-2)^2 + 36 > -(b-2)^2 + 36$

$\Rightarrow g(a) > g(b) \Rightarrow$ $\boxed{\text{الدالة } g \text{ متناقصة على المجال } [2;8]}$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0	2	8
$g(x)$	32 $\nearrow$	36	$\searrow$ 0

5. استنتاج قيمة x حتى تكون مساحة الجزء المظلل أكبر ما يمكن. وتحديد هذه المساحة.

تكون مساحة الجزء المظلل أكبر ما يمكن من أجل $x = 2$، وتبلغ هذه المساحة قيمتها العظمى المساوية لـ $36\ cm^2$.

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول :

1. تحول قيس الزاوية $36°$ إلى الراديان

$$180° \to \pi\, rad$$

$$36° \to x\, rad \Rightarrow x = \frac{36\pi}{180} rad = \boxed{\frac{\pi}{5} rad}$$

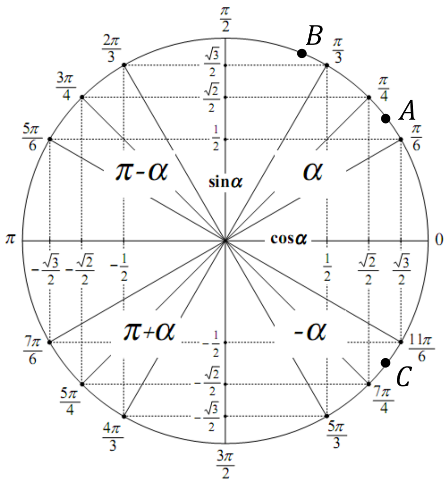
تحويل القيس $\frac{2\pi}{5} rad$ إلى الدرجات.

$$\pi\, rad \to 180°$$

$$\frac{2\pi}{5} rad \to x° \Rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = \boxed{72°}$$

2. تمثيل النقط A ، B و C صور الأعداد $\frac{\pi}{5}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{2019\pi}{5}$ على الدائرة المثلثية.

$$\frac{2019\pi}{5} = \frac{2020\pi - \pi}{5} = 404\pi - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$$



3. بيان أنّ: $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{5} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

4. برهان أنّ: $\tan\frac{\pi}{5} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

$$\tan\frac{\pi}{5} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5-1} = \boxed{\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

التمرين الثاني :

1. إعادة رسم الجدول مبرزا فيه مراكز الفئات والتكرار المجمع الصاعد.

أحجام المياه	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$	$[80;90[$	$[90;100[$
عدد الأحواض	3	7	10	8	2
مركز الفئة	55	65	75	85	95
ت م ص	3	10	20	28	30

2. حساب وسيط هذه السلسلة (Med) ، الربعي الأول (Q_1) والربعي الثالث (Q_3).

بما أنّ $N = 30$، فإنّ رتبة الوسيط هي 15، والفئة الوسيطية هي $[70;80[$.

$$Med = 70 + \frac{5\times 10}{10} = \boxed{75}$$

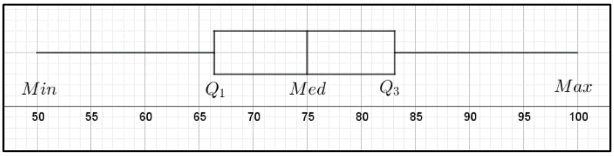
بما أنّ $\frac{N}{4} = 7{,}5$ و $\frac{3N}{4} = 22{,}5$، فإنّ رتبة الربعي الأول هي 8 وينتمي إلى الفئة $[60;70[$ ورتبة الربعي الثالث هي 23 وينتمي إلى الفئة $[80;90[$ ، ومنه:

$$Q_1 = 60 + \frac{4{,}5\times 10}{7} \approx \boxed{66{,}4}\ ;\ Q_3 = 80 + \frac{2{,}5\times 10}{8} \approx \boxed{83{,}1}$$

$$\boxed{Med = a_i + \frac{\frac{N}{2}-S}{E_i}\times h_i\ ; Q_1 = a_i + \frac{\frac{N}{4}-S}{E_i}\times h_i\ ;\ Q_3 = a_i + \frac{\frac{3N}{4}-S}{E_i}\times h_i}$$

ت م ص الذي يسبق الفئة $= S$ ، الحدّ الأدنى للفئة $= a_i$ ، تكرار الفئة $= E_i$ ، طول الفئة $= h_i$

3. تمثيل هذه السلسلة بمخطط العلبة.



4. حساب متوسط حجم المياه المخزنة.

$$\bar{x} = \frac{3\times 55 + 7\times 65 + 10\times 75 + 8\times 85 + 2\times 95}{30} \approx \boxed{74{,}67}$$

5. حساب متوسط حجم المياه.

$$\overline{x'} = \left(1 + \frac{30}{100}\right)\bar{x} = 1{,}3\bar{x} = 1{,}3 \times 74{,}67 \approx \boxed{97}$$

التمرين الثالث :

$A(-1;0)$ ، $B(-3;3)$ و $D(0;3)$.

1. تعليم النقط A ، B و D.

2. تعيين احداثيي النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix};\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}x_C\\y_C-3\end{pmatrix};\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases}x_C=-2\\y_C-3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_C=-2\\y_C=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{C(-2;6)}$$

3. لتكن النقطتان F وH حيث F منتصف القطعة $[AB]$ و $3\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BD}$.

أ. بيان أنّ النقط F ، H و C في استقامية.

$$F \text{ منتصف } [AB] \Rightarrow F\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right) \Rightarrow \boxed{F\left(-2;\frac{3}{2}\right)}$$

$$3\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases}x_H+3=1\\y_H-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_H=-2\\y_H=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{H(-2;3)}$$

بما أنّ $x_F = x_H = x_C$ فإنّ النقط F ، H و C في استقامية.

ب. ماذا تمثل النقطة H بالنسبة إلى المثلث ABC

بما أنّ القطرين $[AC]$ و$[BD]$ يتناصفان في النقطة I فإنّ $[BI]$ متوسط متعلق بالضلع $[AC]$ وبما أنّ $[CF]$ متوسط متعلق بالضلع $[AB]$، نستنتج أنّ النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC (تقاطع المتوسطات).

4. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل A ويوازي (BC).

أ. تعيين معامل توجيه للمستقيم (Δ) وكتابة معادلة له.

بما أنّ $\overrightarrow{BC}(1;3)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)، نستنتج أنّ معامل توجيه للمستقيم (Δ) هو $\frac{y_{\overrightarrow{BC}}}{x_{\overrightarrow{BC}}} = 3$.

$$(\Delta): y = 3x + b \,;\, A \in (\Delta) \Rightarrow 0 = 3(-1) + b \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta): y = 3x + 3}$$

ب. التحقق أنّ معادلة المستقيم (Δ') هي $y = -6x - 15$.

بما أنّ $\overrightarrow{AC}(-1;6)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ')، نستنتج أنّ معامل توجيه للمستقيم (Δ') هو $\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = -6$.

$$(\Delta'): y = -6x + b \,;\, B \in (\Delta') \Rightarrow 3 = -6(-3) + b \Rightarrow b = -15$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta'): y = -6x - 15}$$

ج.   حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة: $\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x + y = -15 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x + y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = -18 \\ y = -6x - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{(-2; -3)\}}$$

تفسير النتيجة هندسيا:

حل الجملة السابقة هي إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ').

5. $(d_m): y = (m+1)x - m + 1$

أ.   أثبت أنّ كل المستقيمات تمرّ من نقطة ثابتة يُطلب تعيين إحداثييها.

نلاحظ أنّ الثنائية $(1; 2)$ تحقق معادلة المستقيم (d_m) من أجل كل قيم m،

ومنه نستنتج أنّ كل المستقيمات تمرّ من نقطة ثابتة إحداثييها $(1; 2)$.

ب.   تعيين قيمة m حتى يشمل المستقيم (d_m) النقطة $I(-1; 3)$.

$$I(-1; 3) \in (d_m) \Rightarrow 3 = (m+1)(-1) - m + 1 \Rightarrow -2m = 3$$

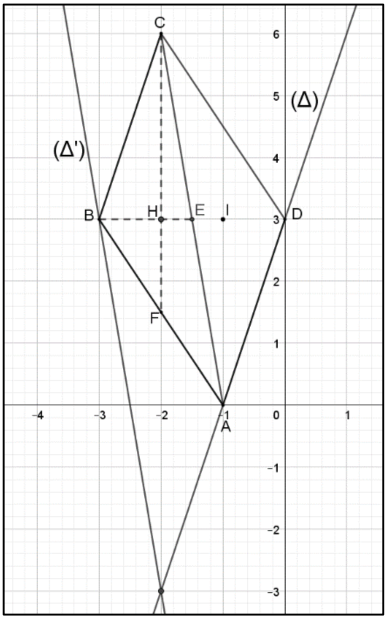
$$\Rightarrow \boxed{m = -\frac{3}{2}}$$

ج.   تعيين قيمة m حتى يوازي المستقيم (d_m) المستقيم (Δ').

$$(d_m) \parallel (\Delta') \xRightarrow[\text{لهما نفس معامل التوجيه } (\Delta') \text{ و } (d_m)]{} m + 1 = -6 \Rightarrow \boxed{m = -7}$$

د.   تعيين قيمة m حتى يعامد المستقيم (d_m) المستقيم (Δ'').

$$(d_m) \perp (\Delta'') \xRightarrow[a \times a' = -1 \text{ شرط التعامد}]{} -\frac{1}{2}(m+1) = -1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$



التمرين الرابع :

$\boldsymbol{g(x) = x+1}$ ، $\boldsymbol{f(x) = \frac{-x-1}{x+2}}$.

1. تعيين قيمتي العددين a و b حيث: $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$.

$$f(x) = \frac{a(x+2)+b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2a+b = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}}$$

2. $f(x) = -1 + \frac{1}{x+2}$

أ. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على كل من المجالين $]-\infty;-2[$ و $]-2;+\infty[$.

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]-\infty;-2[$ حيث $a < b$. لدينا :

$$a < b < -2 \Rightarrow a+2 < b+2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{a+2} > \frac{1}{b+2}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{a+2} > -1 + \frac{1}{b+2} \Rightarrow f(a) > f(b)$$

$\Rightarrow$ **[**الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;-2[$**]**

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]-2;+\infty[$ حيث $a < b$. لدينا :

$$-2 < a < b \Rightarrow 0 < a+2 < b+2 \Rightarrow \frac{1}{a+2} > \frac{1}{b+2}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{a+2} > -1 + \frac{1}{b+2} \Rightarrow f(a) > f(b)$$

$\Rightarrow$ **[**الدالة f متناقصة على المجال $]-2;+\infty[$**]**

ب. جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖ $\searrow$

ج. تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفوصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x-1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (C_f) \cap (xx') = \{(-1;0)\}$$

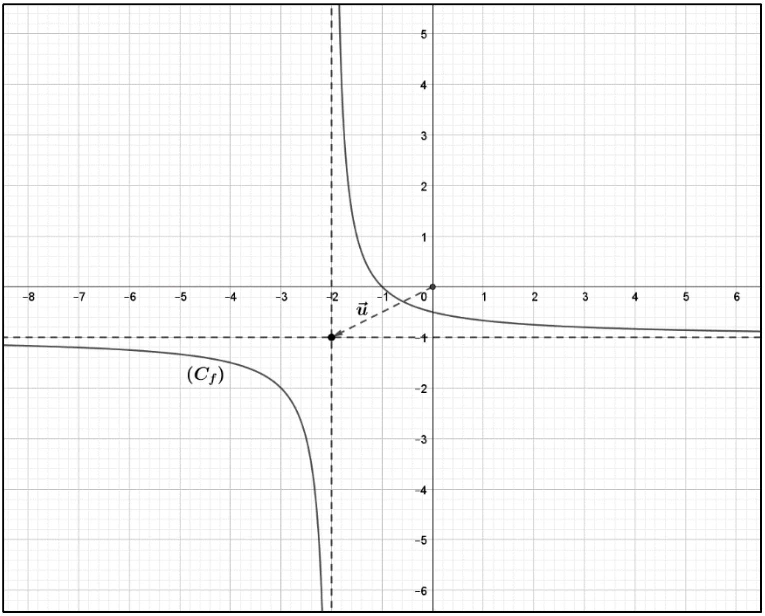
تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور التراتيب:

$$f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (C_f) \cap (yy') = \left\{\left(0;-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

د. بيان أنّه يمكن استنتاج (C_f) انطلاقا من منحنى الدالة مقلوب

بما أنّ $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$ نستنتج أنّ المنحنى (C_f) هو صورة منحنى الدالة مقلوب بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-2;-1)$.

انشاء المنحنى (C_f).



3. بيانيا:

- **حصر $f(x)$ إذا كان $-1 \leq x \leq 0$.**

$$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0}$$

- **حصر x إذا كان $-1 < f(x) < 0$.**

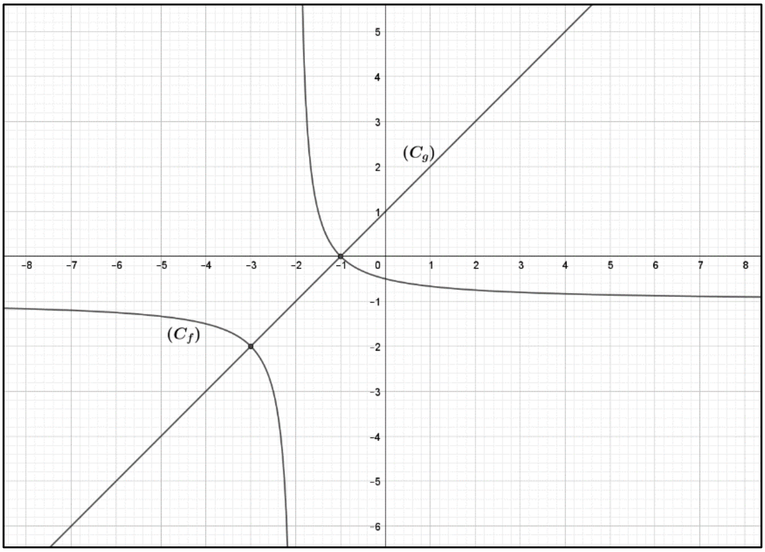
$$-1 < f(x) < 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \boxed{x \in]-1;+\infty[}$$

4. تمثيل المنحنى (C_g).

5. حل بيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$ ، ثمّ حل المتراجحة $f(x) < g(x)$.

$f(x) = g(x) \Rightarrow \boxed{x \in \{-3;-1\}}$ [تقاطع (C_f) و (C_g)]

$f(x) < g(x) \Rightarrow \boxed{x \in]-3;-2[\cup]-1;+\infty[}$ [(C_f) تحت (C_g)]



6. $\boldsymbol{h(x) = |f(x)|}$

أ. كتابة عبارة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

$x \in]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[: f(x) < 0 \Rightarrow h(x) = -f(x)$

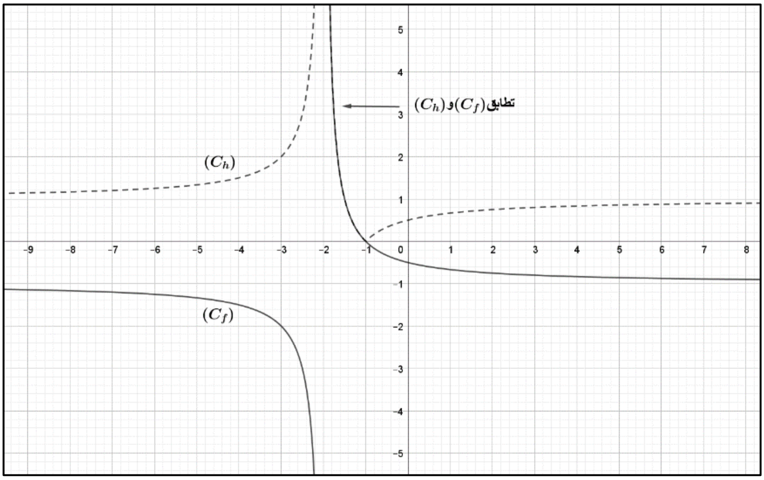
$x \in]-2;-1] : f(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) = f(x)$

ب. شرح كيف يمكن استنتاج (C_h) انطلاقا من (C_f) وانشاء (C_h).

$x \in]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[: h(x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{(C_h) \text{ نظير } (C_f) \text{ بالنسبة إلى محور الفواصل}}$

$x \in]-2;-1] : h(x) = f(x) \Rightarrow$ $\boxed{(C_h) \text{ منطبق على } (C_f)}$



حلول الاختبارات
الفصل الثالث

الموضوع الأول

التمرين الأول :

C(2 ; -3) ، B(-1 ; 3) ، A(1 ; 2)

1. اثبات أنّ النقط A، B، C ليست على استقامية

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ ، $(-2)(-5)-1=9\neq 0$ ، إذن $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّيا ، ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامية

2. تعيين إحداثيي النقطة D بحيث يكون الرباعي ABCD متوازي الأضلاع

يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع إذا تحققت العلاقة : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ، ومنه :

$\begin{cases}2-x_D=-2\\-3-y_D=1\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x_D=4\\y_D=-4\end{cases}$ ومنه $\boxed{D(4;-4)}$

3. تعيين نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ABCD

لتكن I نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ABCD ، إذن I منتصف $[AC]$ ،

أي $x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3}{2}$ و $y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=-\frac{1}{2}$ ، ومنه $\boxed{I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)}$

4. حساب فاصلة E بحيث يكون المستقيمان (AB) و (CE) متوازيين

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x-2\\2\end{pmatrix}$ ، يكون المستقيمان (AB) و (CE) متوازيين إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CE}$ مرتبطين خطّيا ، أي : $0=4+2-x$ ومنه $\boxed{x=-2}$

5. حساب الأطوال AD ،AE ، DE ، واستنتاج نوع المثلث ADE

$$AD=\sqrt{(4-1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{45}=\boxed{3\sqrt{5}}$$

$$AE=\sqrt{(-2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}=\boxed{3\sqrt{2}}$$

$$DE=\sqrt{(-2-4)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{45}=\boxed{3\sqrt{5}}$$

بما أنّ $AD=DE$ فإنّ المثلث ADE متساوي الساقين

6.

أ. كتابة معادلة للمستقيم (BC)

$M(x;y)\in(BC)$ معناه $\overrightarrow{BM}\parallel\overrightarrow{BC}$ أي $-6(x+1)-3(y-3)=0$

ومنه $\boxed{(BC): y=-2x+1}$

ب. كتابة معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه 1

بما أنّ معامل توجيه المستقيم (Δ) هو1 فإنّ معادلته من الشكل $y = x + b$

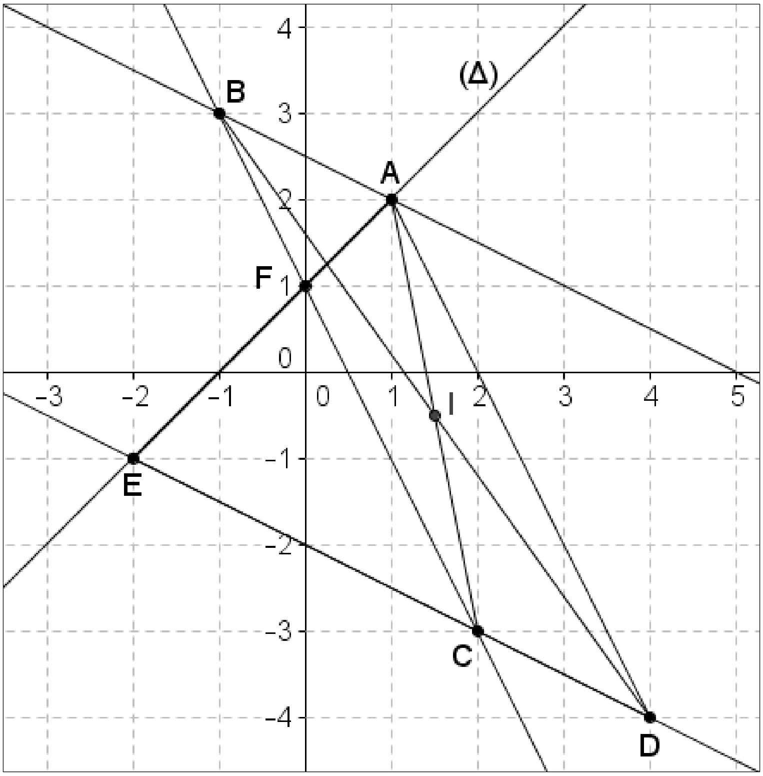
$A(1;2) \in (\Delta)$ معناه $y_A = x_A + b$ أي $2 = 1 + b$ ، إذن $b = 1$ ،

ومنه $\boxed{(\Delta): y = x + 1}$

ج. تعيين نقطة تقاطع المستقيمين (BC) و (Δ)

$$F(x;y) \in (BC) \cap (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 1 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F(0;1)}$$



التمرين الثاني :

1. تعيين عدد تلاميذ القسم

عدد تلاميذ القسم هو 39

2. **جدول التواترات والتكرارات المجمعة الصاعدة**

العلامات	5	8	9	10	12	14	16	18
التكرار	3	4	6	9	5	6	2	4
التواتر	$\frac{1}{13}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{39}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{39}$	$\frac{4}{39}$
ت م ص	3	7	13	22	27	33	35	39

3. **حساب النسبة المئوية للتلاميذ الذين تحصلوا على المعدل**

بما أنّ عدد التلاميذ الذين تحصلوا على المعدل هو 26 ، فإنّ النسبة المئوية لهؤلاء التلاميذ هي :

$$\frac{26}{39} \times 100 = \boxed{66{,}7\ \%}$$

4. **حساب معدل القسم**

$$\bar{x} = \frac{(5 \times 3) + (8 \times 4) + (9 \times 6) + (10 \times 9) + (12 \times 5) + (14 \times 6) + (16 \times 2) + (18 \times 4)}{39}$$

$$\bar{x} = \frac{439}{39} \approx \boxed{11{,}25}$$

5. **تعيين العلامة المنوالية والعلامة الوسيطية لهذه السلسلة**

العلامة المنوالية هي 10 ، وبما أنّ التكرار الكلي هو 39 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 20 ، ومنه العلامة الوسيطية هي 10

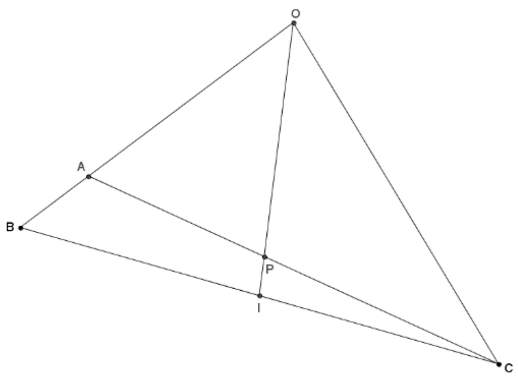
6. **تعيين المعدل الجديد للقسم**

بعد إضافة 1,5 نقطة لكل العلامة يزداد معدل القسم بـ 1,5 ، ومنه :

$$\bar{x} = 11{,}25 + 1{,}5 = \boxed{12{,}75}$$

التمرين الثالث :

1. **انشاء النقط A ، I ، P**



2. بيان أنّ: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{OI}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}\ (\text{متعاكسان})}=\boxed{2\overrightarrow{OI}}$$

3. برهان أنّ: $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

$$4\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{PA}+3\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Rightarrow 7\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 7\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}}$$

4. برهان أنّ: $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{7}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OA}-\frac{3}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OC}=\frac{4}{7}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}\right)+\frac{3}{7}\overrightarrow{OC}=\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OC}=\boxed{\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)}$$

استنتاج أنّ: $\overrightarrow{OP}=\frac{6}{7}\overrightarrow{OI}$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{7}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{3}{7}\left(2\overrightarrow{OI}\right)=\boxed{\frac{6}{7}\overrightarrow{OI}}$$

5. الاستنتاج بالنسبة للنقط O ، I ، P

بما أنّ الشعاعين $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OI}$ مرتبطان خطّيا ، نستنتج أنّ النقط O ، I ، P في استقامية.

التمرين الرابع :

$$(1)\begin{cases}-2x+7y=18\\11x+4y=71\end{cases};\ \Delta=\begin{vmatrix}-2&7\\11&4\end{vmatrix}=-85$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}18&7\\71&4\end{vmatrix}}{-85}=\frac{-425}{-85}=5\ ;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2&18\\11&71\end{vmatrix}}{-85}=\frac{-340}{-85}=4$$

$$\boxed{S=\{(5;4)\}}$$

$$(2)\begin{cases}-2\sqrt{x}+7\sqrt{y}=18\\11\sqrt{x}+4\sqrt{y}=71\end{cases};\begin{cases}\sqrt{x}=5\\\sqrt{y}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25\\y=16\end{cases};\ \boxed{S=\{(25;16)\}}$$

$$(3)\begin{cases}-2x^2+7y^2=18\\11x^2+4y^2=71\end{cases};\begin{cases}x^2=5\\y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{5}\ \text{أو}\ x=-\sqrt{5}\\y=2\ \text{أو}\ y=-2\end{cases}$$

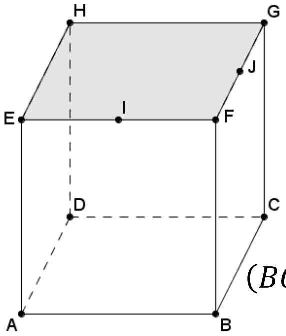
$$\boxed{S=\left\{\left(\sqrt{5};2\right);\left(-\sqrt{5};2\right);\left(\sqrt{5};-2\right);\left(-\sqrt{5};-2\right)\right\}}$$

$$(4)\begin{cases}-\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{7}{3-y}=18\\ \dfrac{11}{2x+1}+\dfrac{8}{6-2y}=71\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{2}{2x+1}+\dfrac{7}{3-y}=18\\ \dfrac{11}{2x+1}+\dfrac{4}{3-y}=71\end{cases}\text{ مع }\begin{cases}x\neq-\dfrac{1}{2}\\ y\neq 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2x+1}=5\\ \dfrac{1}{3-y}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5(2x+1)=1\\ 4(3-y)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x=-4\\ -4y=-11\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{11}{4}\end{cases};\ \boxed{S=\left\{\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{11}{4}\right)\right\}}$$

الموضوع الثاني



التمرين الأول :

.1

أ. المستقيمات الموازية للمستقيم (AB) هي :

(HG) و (EF) ، (DC)

ب. المستقيمات العمودية على المستقيم (AB) هي :

(BC) و (AD) ، (CG) ، (DH) ، (BF) ، (AE)

ج. المستقيمات التي تقطع (AB) هي :

(BC) و (AD) ، (BF) ، (AE)

د. المستقيمات العمودية على المستوي (ABCD) هي :

(CG) و (DH) ، (BF) ، (AE)

ه. المستقيمات التي تقطع المستوي (ABCD) هي :

(CG) و (DH) ، (BF) ، (AE)

.2 بيان أنّ المستقيمين (IJ) و (DF) ليسا من نفس المستوي

بما أنّ النقط I ، J و F تنتمي إلى المستوي $(EFGH)$ ، والنقطة D لا تنتمي لهذا المستوي ، فإنّ المستقيم (DF) لا ينتمي أيضا لهذا المستوي ، منه نستنتج أنّ المستقيمين (IJ) و (DF) ليسا من نفس المستوي.

التمرين الثاني :

.1 تعيين إحداثيات النقط A ، B ، C

$C\left(-\frac{3}{2};2\right)$ ، $B(7;0)$ ، $A(2;4)$

.2 $\overrightarrow{CI}(4;0)$ ، $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{3}{4};-3\right)$ ، $J\left(\frac{11}{4};1\right)$ ، $I\left(\frac{9}{2};2\right)$

أ. كتابة معادلتي المستقيمين (AJ) و (CI)

$M(x;y)\in(AJ)$ معناه $\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AJ}$ أي $-3(x-2)-\frac{3}{4}(y-4)=0$

ومنه $-3x-\frac{3}{4}y+9=0$ أي $\boxed{(AJ): y=-4x+12}$

$M(x;y)\in(CI)$ معناه $\overrightarrow{CM}\parallel\overrightarrow{CI}$ أي $0\left(x+\frac{3}{2}\right)-4(y-2)=0$

ومنه $y-2=0$ أي $\boxed{(CI): y=2}$

ب. حساب إحداثيي E نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (CI)

$$E(x;y) \in (AJ) \cap (CI) \Rightarrow \begin{cases} y = -4x + 12 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -4x + 12 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

بما أنّ النقطة E هي تقاطع المتوسطين (AJ) و(CI) ، فهي مركز ثقل المثلث ABC

ج. اثبات أنّ : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

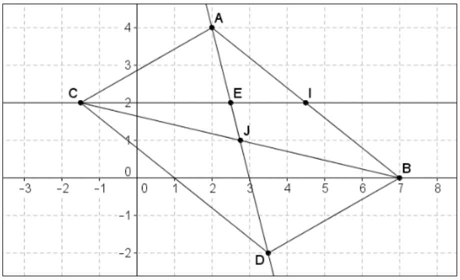
لتكن D نظيرة A بالنسبة إلى J. لدينا :

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ (النقطة E مركز ثقل المثلث ABC)

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$ (النقطة J منتصف القطعة $[AD]$)

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ (بالاختزال)

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ($[AD]$ قطر للرباعي $ABDC$)



التمرين الثالث :

1. **تعليم النقط A ، B ، C**
2. **حساب أطوال أضلاع المثلث ABC**

$$AB = \sqrt{(-1+4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$AC = \sqrt{(1+4)^2 + (2-3)^2} = \boxed{\sqrt{26}}$$

$$BC = \sqrt{(1+1)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

3. **اثبات أنّ المثلث ABC قائم في B**

لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ، منه نستنتج أنّ المثلث ABC قائم في B

4. **حساب $\cos \widehat{A}$ و استنتاج قيمة مقرّبة للزاوية $\widehat{A}$**

$$\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \boxed{\hat{A} \approx 33{,}7°}$$

5. حساب مساحة المثلث ABC

$$S_{ABC}=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \boxed{S_{ABC}=6\ cm^2}$$

6. $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OC}$

أ. انشاء $A'B'C'$ مع التعليل

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OC}\Rightarrow\begin{cases}x'_A+4=1\\ y'_A-3=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_A=-3\\ y'_A=5\end{cases}\Rightarrow\boxed{A'(-3;5)}$$

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OC}\Rightarrow\begin{cases}x'_B+1=1\\ y'_B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_B=0\\ y'_B=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{B'(0;2)}$$

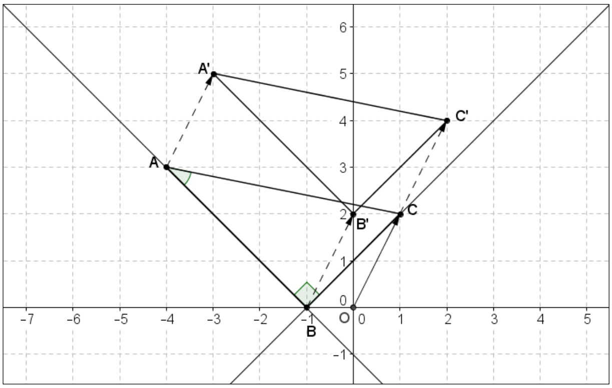
$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{OC}\Rightarrow\begin{cases}x'_C-1=1\\ y'_C-2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_C=2\\ y'_C=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{C'(2;4)}$$

ب. مقارنة مساحتي المثلثين $A'B'C'$ و ABC

بما أنّ الانسحاب يحافظ على المساحات ، فإنّ مساحتي المثلثين $A'B'C'$ و ABC متساويتان

7. انشاء صورة المستقيم (BC) بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

بما أنّ المثلث ABC قائم في B فإنّ المستقيمين (AB) و (BC) متعامدان في النقطة B ، ومنه نستنتج أنّ صورة المستقيم (BC) بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ هو المستقيم (AB).



التمرين الرابع :

الوزن	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80[$
عدد التلاميذ	30	77	42	32
مركز الفئة	45	55	65	75
ت م ص	30	107	149	181

1. **الفئة المنوالية لهذه السلسلة هي $[50;60[$**
2. **حساب معدل الأوزان**

$$\bar{x} = \frac{(30\times 45)+(77\times 55)+(42\times 65)+(32\times 75)}{181} = \frac{10715}{181} \approx \boxed{59,2}$$

3. **حساب الوزن الوسيطي**

بما أنّ التكرار الكلي هو 181 فإنّ رتبة الوسيط هي $\frac{181+1}{2} = 91$ والفئة الوسيطية هي $[50;60[$ ، ومنه :

$$Med = 50 + \frac{61\times 10}{77} = 50 + \frac{610}{77} \approx \boxed{57,9}$$

حيث تمثل الأعداد 50 ، 61 ، 10 و 77 على الترتيب الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{50}};60[$، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية ($\mathbf{61} = 30 - 91$)، طول الفئة الوسيطية ($\mathbf{10} = 50 - 60$) وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية.

4. **حساب النسبة المئوية للتلاميذ الذين تبلغ أوزانهم 60 كغ على الأقل**

$$n = \frac{42+32}{181}\times 100 \approx \boxed{40,9\%}$$

5. **حساب الوزن المتوسط للذكور**

بما أنّ عدد البنات 96 فإنّ عدد الذكور يساوي $85 = 96 - 181$ ، ومنه :

$$\bar{x} = \frac{(96\times 52)+(85\times m)}{181} = 59,2 \Rightarrow 85m + 4992 = 10715,2$$

$$\Rightarrow m = \frac{5723,2}{85} \approx \boxed{67,3}$$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

1. كتابة معادلة كل من المستقيم (Δ) و(Δ')

$M(x;y) \in (\Delta)$ معناه $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{u}$ أي $2(x-4)+2(y+1)=0$ ومنه :

$x+y-3=0$ أي $\boxed{(\Delta): y=-x+3}$

$M(x;y) \in (\Delta')$ معناه $\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BC}$ أي $-4(x-2)+4(y-5)=0$

ومنه : $-x+y-3=0$ أي $\boxed{(\Delta'): y=x+3}$

2. دراسة وضعية المستقيمين (Δ) و(Δ')

ليكن a معامل توجيه المستقيم (Δ) و a' معامل توجيه المستقيم (Δ')

لدينا : $a \times a' = (-1)\times(1) = -1$ ، منه نستنتج أنّ (Δ) و(Δ') متعامدان

3. بيان أنّ المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بدوران $\mathcal{R}$ يُطلب تحديد مركزه ω وزاويته θ

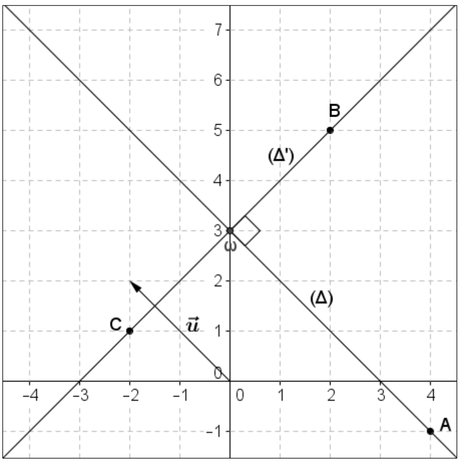
بما أنّ (Δ) و(Δ') متعامدان فإنّ المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بدوران $\mathcal{R}$

مركزه ω نقطة تعامد المستقيمين (Δ) و(Δ') وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

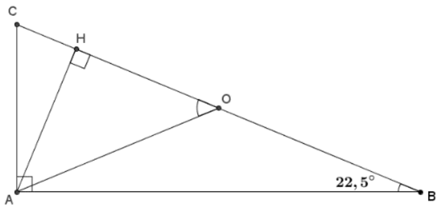
$$\omega(x;y) \in (\Delta)\cap(\Delta') \Rightarrow \begin{cases} y=-x+3 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=-x+3 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$$

منه نستنتج أنّ الدوران $\mathcal{R}$ مركزه $\boxed{\omega(0;3)}$ وزاويته $\boxed{\theta = \left|\frac{\pi}{2}\right|}$

4. النقطة B ليست صورة النقطة A بهذا الدوران لأنّ $\omega A \neq \omega B$.



التمرين الثاني :



1. **حساب قيس للزاوية $\boldsymbol{A\hat{O}H}$**

لدينا : $OA = OB = OC = x$ ، إذن المثلث AOC متساوي الساقين في O ،
وبما أنّ $\hat{C} = 90 - \hat{B} = 67{,}5°$ ، فإنّ $A\hat{O}H = 180 - 2(67{,}5) = \boxed{45°}$

2. **التعبير عن AH و OH بدلالة x**

لدينا : $A\hat{O}H = 45°$ و$A\hat{H}O = 90°$ ، إذن $O\hat{A}H = 45°$ وبالتالي فإنّ المثلث AOH قائم في H ومتساوي الساقين ، ومنه :

$$AH^2 + OH^2 = OA^2 \Rightarrow 2AH^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{AH = OH = \frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

3. **استنتاج طول الضلع AB بدلالة x**

$$AB^2 = BH \times BC = (BO + OH) \times BC = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)2x = \left(2 + \sqrt{2}\right)x^2$$

$\boxed{AB = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\,x}$ (راجع العلاقات المترية في المثلث القائم)

4. **حساب القيم المضبوطة لـ cos 22,5° و sin 22,5°**

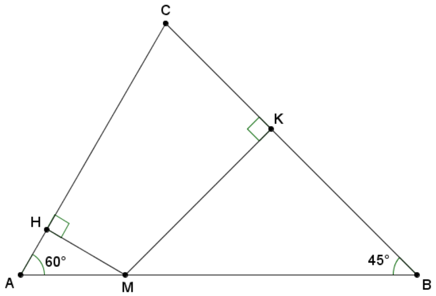
$$\cos\widehat{ABH} = \frac{BH}{AB} = \frac{\left(2 + \sqrt{2}\right)x}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,x} \Rightarrow \boxed{\cos 22{,}5° = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}$$

$$\sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{2}\,x}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}\,x} \Rightarrow \boxed{\sin 22{,}5° = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}}$$

التمرين الثالث :

I-

1. **انجاز شكل مناسب**



.2 كتابة عبارة MH بدلالة x

لدينا في المثلث AHM القائم في H :

$$\sin \hat{A} = \frac{MH}{AM} \Rightarrow MH = AM \times \sin \hat{A} \Rightarrow \boxed{MH = \frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

.3 كتابة عبارة MK بدلالة x

لدينا في المثلث BKM القائم في K :

$$\sin \hat{B} = \frac{MK}{MB} \Rightarrow MK = MB \times \sin \hat{B} \Rightarrow \boxed{MK = \frac{\sqrt{2}}{2}(10 - x)}$$

.4 تعيين قيمة x التي تكون من أجلها المسافتان MH وMK متساويتان

$$MH = MK \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}(10 - x) \Rightarrow \sqrt{3}x = \sqrt{2}(10 - x)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})x = 10\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 10\sqrt{6} - 20 \approx 4{,}5}$$

II- $F(x) = \mathcal{S}_{MAH} + \mathcal{S}_{MBK}$

.1 كتابة عبارتي A(x) و B(x) بدلالة x

$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AH = AM \times \cos \hat{A} \Rightarrow \boxed{AH = \frac{1}{2}x}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{BK}{MB} \Rightarrow BK = MB \times \cos \hat{B} \Rightarrow \boxed{BK = \frac{\sqrt{2}}{2}(10 - x)}$$

$$A(x) = \mathcal{S}_{MAH} = \frac{AH \times MH}{2} = \frac{\frac{1}{2}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}x^2}$$

$$B(x) = \mathcal{S}_{MBK} = \frac{BK \times MK}{2} = \frac{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(10 - x)\right]^2}{2} \Rightarrow \boxed{B(x) = \frac{1}{4}(10 - x)^2}$$

2. استنتاج أنّ: $F(x)=\frac{x^2(\sqrt{3}+2)}{8}-5x+25$

$$F(x)=A(x)+B(x)=\frac{\sqrt{3}}{8}x^2+\frac{1}{4}(10-x)^2=\frac{\sqrt{3}}{8}x^2+\frac{1}{4}x^2-5x+25$$

$$\boxed{F(x)=\frac{x^2(\sqrt{3}+2)}{8}-5x+25}$$

3. حساب $F(\alpha)$

$$F(\alpha)=\frac{400\left(2-\sqrt{3}\right)^2(\sqrt{3}+2)}{8}-5\times 20(2-\sqrt{3})+25$$

$$F(\alpha)=50\left(2-\sqrt{3}\right)-100\left(2-\sqrt{3}\right)+25=-50\left(2-\sqrt{3}\right)+25$$

$$\boxed{F(\alpha)=50\sqrt{3}-75}$$

4. بيان أنّ: $F(x)-F(\alpha)=k(x-\alpha)^2$، حيث k عدد حقيقي يُطلب تعيينه

$$F(x)-F(\alpha)=\frac{x^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{8}-5x+25-50\sqrt{3}+75$$

$$=\frac{x^2\left(\sqrt{3}+2\right)}{8}-5x+100-50\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{8}\left[x^2-\frac{40}{\sqrt{3}+2}x+\frac{800-400\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{8}\left[x^2-40(2-\sqrt{3})x+400\left(2-\sqrt{3}\right)^2\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{8}\left[x-20\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2=\frac{\sqrt{3}+2}{8}(x-\alpha)^2$$

منه ، نستنتج أنّ $\boxed{k=\frac{\sqrt{3}+2}{8}}$

5. استنتاج وضعية النقطة M بحيث تكون F(x) أصغر ما يمكن

$$\frac{\sqrt{3}+2}{8}(x-\alpha)^2\geq 0\Rightarrow F(x)-F(\alpha)\geq 0\Rightarrow F(x)\geq F(\alpha)$$

تكون $F(x)$ أصغر ما يمكن من أجل $x=\alpha$ أي $\boxed{x=20(2-\sqrt{3})}$

التمرين الرابع :

1. حساب الأطوال AB ، AD و BD

$$AB=\sqrt{(2+2)^2+(2)^2}=\sqrt{20}=\boxed{2\sqrt{5}}$$

$$AD=\sqrt{(-4+2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{20}=\boxed{2\sqrt{5}}$$
$$BD=\sqrt{(-4-2)^2+(2)^2}=\sqrt{40}=\boxed{2\sqrt{10}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABD

لدينا : $AB=AD$ و $BD^2=AB^2+AD^2$ ، منه نستنتج أنّ المثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين

2. اثبات أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ، ومنه $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}$

استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$

بما أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ والمثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين ، فإنّ الرباعي $ABCD$ مربّع

3. ذكر طبيعة المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ مع التعليل

بما أنّ المثلث ABD قائم في A ومتساوي الساقين ، فإنّ المعلم $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ متعامد ومتجانس

4. حل في $\mathbb{R}$ الجملة : $\begin{cases}4x-2y=2\\2x+4y=6\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4&-2\\2&4\end{vmatrix}=20$$
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2&-2\\6&4\end{vmatrix}}{20}=\frac{20}{20}=\boxed{1}\ ;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}4&2\\2&6\end{vmatrix}}{20}=\frac{20}{20}=\boxed{1}$$

استنتاج إحداثيات النقطة C في المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

لدينا : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ، ومنه نستنتج أنّ إحداثيات النقطة C في المعلم $(\mathrm{A},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ هي $(1;1)$

5. بيان أنّ $-x+2y+2=0$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

طريقة ①

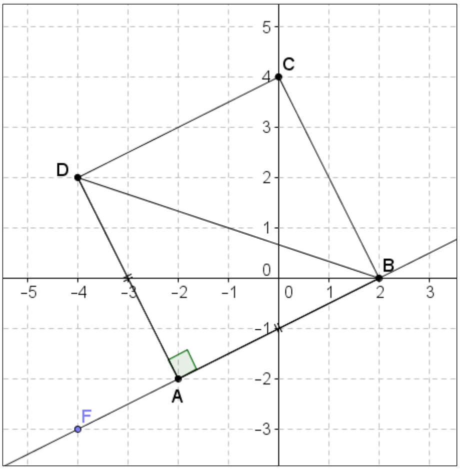
$M(x;y)\in(AB)$ معناه $\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AB}$ أي $2(x+2)-4(y+2)=0$ ومنه

$2x-4y-4=0$ أي $\boxed{-x+2y+2=0}$ (بالقسمة على 2-)

طريقة ②

$\begin{cases}-x_A+2y_A+2=2-4+2=0\\-x_B+2y_B+2=-2+2=0\end{cases}$ ، منه نستنتج أنّ $-x+2y+2=0$ معادلة ديكارتية لـ (AB)

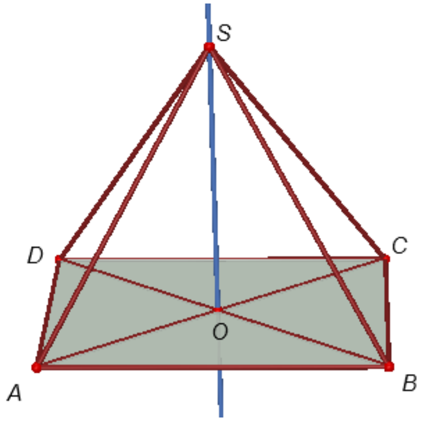
النقطة $F(-4;-3)$ تنتمي إلى (AB) لأنّ $-x_F+2y_F+2=4-6+2=0$


C
D
B
A
F
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

الموضوع الرابع

التمرين الأول :

1. انشاء شكل مناسب



2. حساب المسافات SA ، SB ، SC ، SD

$$SA^2 = OA^2 + OS^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + OS^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2) + OS^2$$

$$SA^2 = \frac{1}{4}(6^2 + 4^2) + 5^2 = \frac{52}{4} + 25 = 38 \Rightarrow \boxed{SA = \sqrt{38}\ cm}$$

$$SB^2 = OB^2 + OS^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + OS^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AD^2) + OS^2$$

$$SB^2 = \frac{1}{4}(6^2 + 4^2) + 5^2 = \frac{52}{4} + 25 = 38 \Rightarrow \boxed{SB = \sqrt{38}\ cm}$$

$$SC^2 = OC^2 + OS^2 = \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + OS^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2) + OS^2$$

$$SC^2 = \frac{1}{4}(6^2 + 4^2) + 5^2 = \frac{52}{4} + 25 = 38 \Rightarrow \boxed{SC = \sqrt{38}\ cm}$$

$$SD^2 = OD^2 + OS^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 + OS^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AD^2) + OS^2$$

$$SD^2 = \frac{1}{4}(6^2 + 4^2) + 5^2 = \frac{52}{4} + 25 = 38 \Rightarrow \boxed{SD = \sqrt{38}\ cm}$$

3. حساب حجم الهرم $SABCD$

$$V_{SABCD} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3} = \frac{AB \times AD \times OS}{3} = \frac{6 \times 4 \times 5}{3} = \boxed{40\ cm^3}$$

4. **حساب المساحة الجانبية للهرم $SABCD$**

المساحة الجانبية للهرم $SABCD$ تساوي 4 أضعاف مساحة المثلث ABS

(لأنّ المثلثات ABS ، BCS ، CDS وADS متقايسة). نسمي H منتصف $[AB]$

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = SA^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = 38 - 9 = 29 \Rightarrow SH = \sqrt{29}$$

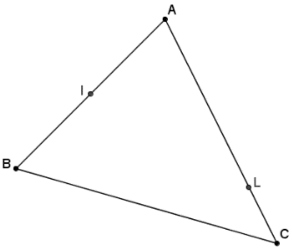
$$\mathcal{S}_{ABS} = \frac{AB \times SH}{2} = \frac{6\sqrt{29}}{2} = 3\sqrt{29}\ cm^2$$

$$\mathcal{S}_{SABCD} = 4 \times \mathcal{S}_{ABS} = 4 \times 3\sqrt{29} = \boxed{12\sqrt{29}\ cm^2}$$

5. **تعيين قيس للزاوية $B\widehat{D}S$**

بما أنّ المثلث ODS قائم في O فإنّ :

$$\sin\widehat{ODS} = \frac{SO}{SD} = \frac{5}{\sqrt{38}} \approx 0{,}81 \Rightarrow \boxed{\widehat{BDS} \approx 54°}\ (\widehat{BDS} = \widehat{ODS})$$



التمرين الثاني :

1. **$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ معلم للمستوي : صحيح**

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّيا

2. **إحداثيات كل من B ، C ، I ، L في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ هي :**

$B(1;0)$ ، $C(0;1)$ ، $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ، $L\left(0;\frac{3}{4}\right)$: خطأ

إحداثيي النقطة I في المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ هي $I\left(\frac{1}{2};0\right)$

3. **المستقيمان (IL) و (BC) متوازيان : خطأ**

$\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ و $\frac{AL}{AC} = \frac{3}{4}$ منه $\frac{AL}{AC} \neq \frac{AI}{AB}$ أي (IL) و(BC) غير متوازيين

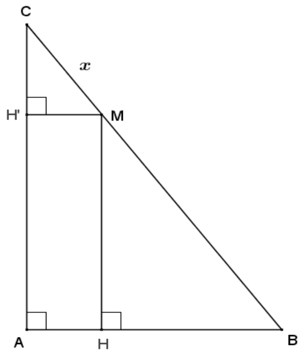
4. **الجملة : $\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ kx + y = 1 \end{cases}$ تقبل مالا نهاية من الحلول من أجل $k = -\frac{3}{2}$: خطأ**

$\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ -\frac{3}{2}x + y = 1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$ (نضرب المعادلة الثانية في 4-)

وهذه الجملة ليس لها حلول.

التمرين الثالث :

1. رسم الشكل



2. حساب BC

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow \boxed{BC = 5}$$

3. تعيين مجال انتماء x

بما أنّ $M \in [BC]$ فإنّ $\boxed{x \in [0; 5]}$

4. بيان أنّ الرباعي HAH′M مستطيل

بما أنّ $\hat{A} = \widehat{H} = \widehat{H'} = 90°$ فإنّ الرباعي $HAH'M$ مستطيل

5. بيان أنّ $H'M = \frac{3}{5}x$ و $HM = 4 - \frac{4}{5}x$

في المثلث ABC لدينا $(AB) \parallel (H'M)$ ، ومنه (حسب نظرية طالس) :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{H'M}{AB} \Rightarrow H'M = \frac{CM \times AB}{CB} = \boxed{\frac{3}{5}x}$$

في المثلث ABC لدينا $(AC) \parallel (HM)$ ، ومنه (حسب نظرية طالس) :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{HM}{AC} \Rightarrow HM = \frac{BM \times AC}{BC} = \frac{4(5-x)}{5} = \boxed{4 - \frac{4}{5}x}$$

6. حساب P(x) محيط المستطيل HAH′M

$$P(x) = 2(HM + H'M) = 2\left(4 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}x\right) \Rightarrow \boxed{P(x) = 8 - \frac{2}{5}x}$$

7. تحديد نوع الدالة P واتجاه تغيراتها

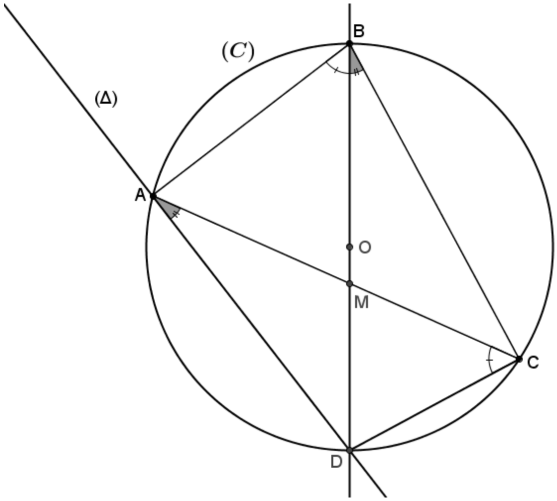
الدالة P تآلفية متناقصة (لأنّ $a < 0$)

8. حساب S(x) مساحة المستطيل HAH′M

$$S(x) = HM \times H'M = \left(4 - \frac{4}{5}x\right)\left(\frac{3}{5}x\right) \Rightarrow \boxed{S(x) = -\frac{12}{25}x^2 + \frac{12}{5}x}$$

التمرين الرابع :

1. انشاء الشكل



2. برهان أنّ $[BD]$ هو قطر للدائرة (C)

بما أنّ المستقيم (Δ) يعامد المستقيم (AB) ، فإنّ المثلث ABD قائم في A ، وبما أنّه مرسوم داخل الدائرة (C) نستنتج أنّ وتره $[BD]$ هو قطر للدائرة (C)

استنتاج أنّ المستقيمين (CD) و (BC) متعامدان

المثلث ABD مرسوم داخل الدائرة (C) وتره $[BD]$ هو قطر للدائرة (C) فهو إذن قائم في C ، ومنه نستنتج أنّ المستقيمين (CD) و (BC) متعامدان

3. برهان أنّ $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ وأنّ $\widehat{DCA} = \widehat{ABD}$

الزاويتان $\widehat{DBC}$ و $\widehat{DAC}$ محيطيتان تحصران نفس القوس CD فهما إذن متقايستان ، وكذلك الزاويتان $\widehat{ABD}$ و $\widehat{DCA}$ محيطيتان تحصران نفس القوس AD فهما إذن متقايستان

4. برهان أنّ المثلثين MDC و ABM متشابهان

لدينا $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (زاويتان متقابلتان بالرأس) و $\widehat{DCA} = \widehat{ABD}$ (ممّا سبق) ، ومنه نستنتج أنّ المثلثين MDC و ABM متشابهان

5. استنتاج أنّ $AM \times MC = BM \times MD$

بما أنّ المثلثين MDC و ABM متشابهان فإنّ أضلاعهما المتماثلة متناسبة ، أي :

$\frac{BM}{MC} = \frac{AM}{MD}$ ومنه نستنتج أنّ : $\boxed{AM \times MC = BM \times MD}$

الموضوع الخامس

التمرين الأول :

1. **اكمال الجدول مبينا فيه مراكز الفئات و التكرار المجمّع الصاعد و التكرار المجمّع النازل**

الفئات	]0 ; 10]	]10 ; 20]	]20 ; 30]	]30 ; 40]	]40 ; 50]	]50 ; 60]
التكرارات	5	10	20	40	30	15
ت م ص	5	15	35	75	105	120
ت م ن	120	115	105	85	45	15
المراكز	5	15	25	35	45	55

2. **تعيين الفئة المنوالية**

الفئة المنوالية لهذه السلسلة هي :]30 ; 40]

3. **حسب الوسط الحسابي ، الوسيط و المدى**

$$\bar{x} = \frac{(5\times 5)+(15\times 10)+(25\times 20)+(35\times 40)+(45\times 30)+(55\times 15)}{120}$$

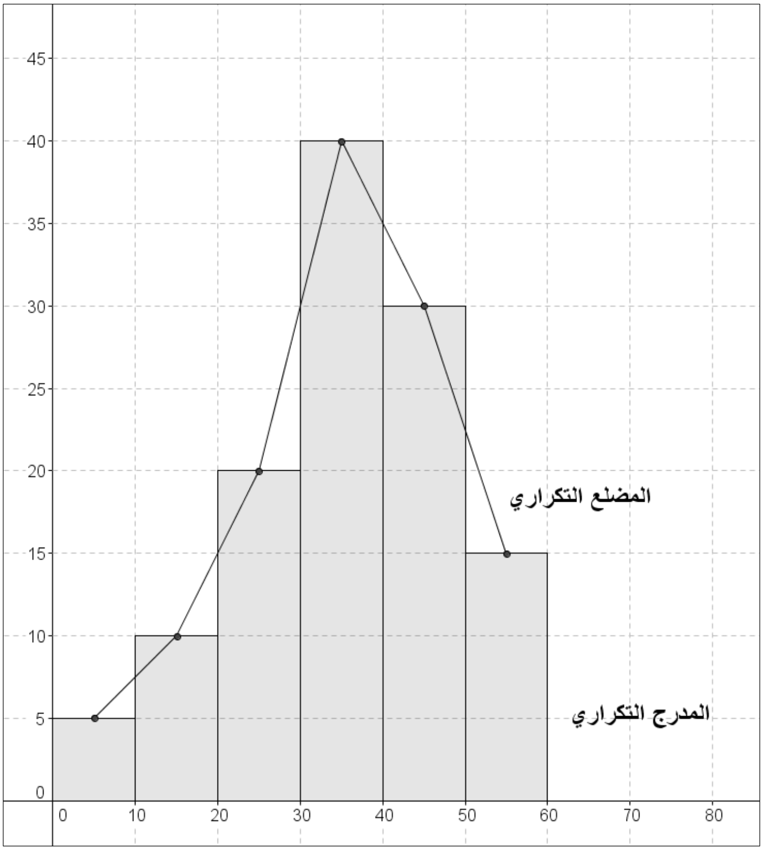
$$\bar{x} = \frac{4250}{120} \approx \boxed{35{,}4}$$

بما أنّ التكرار الكلي هو 120 فإنّ رتبة الوسيط هي 60 والفئة الوسيطية هي]30 ; 40] ، ومنه :

$$Med = 30 + \frac{25\times 10}{40} = 30 + 6{,}25 = \boxed{36{,}25}$$

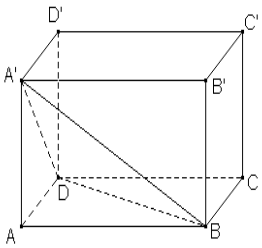
حيث تمثل الأعداد 30 ، 25 ، 10 و 40 على الترتيب الحد الأدنى للفئة الوسيطية]$\underline{\mathbf{30}}$; 40]، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية ($\mathbf{25} = 60 - 35$)، طول الفئة الوسيطية ($\mathbf{10} = 40 - 30$) وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية.

4. **انشاء المدرّج التكراري واستنتاج المضلّع التكراري**



التمرين الثاني :

$ABCDA'B'C'D'$ مكعّب حرفه a.



1. **اثبات أنّ المثلث BDA' متقايس الأضلاع**

$A'B$ ، $A'D$ و BD هي أقطار للمربعات $ABB'A'$ ، $ADD'A'$ و $ABCD'$ على الترتيب ، فهي إذن متقايسة ومنه نستنتج أنّ المثلث BDA' متقايس الأضلاع

2. **التعبير عن مساحة المثلث BDA' بدلالة a**

$$S_{BDA'} = \frac{A'B \times DH}{2} \; ; A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 2a^2 \Rightarrow A'B = \sqrt{2}a$$

$$DH^2 = DB^2 - HB^2 = 2a^2 - \left(\frac{1}{2}a^2\right) = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow DH = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

$$S_{BDA'} = \frac{A'B \times DH}{2} = \frac{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{3}{2}}a}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}$$

3. حساب حجم الهرم $ABDA'$ بدلالة a

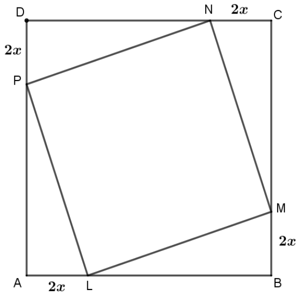
$$V_{ABDA'} = \frac{S_{ABD} \times AA'}{3} = \frac{\frac{1}{2}a^2 \times a}{3} = \boxed{\frac{1}{6}a^3}$$

4. استنتاج بعد النقطة A عن المستوي (BDA')

نسمي h بُعد النقطة A عن المستوي (BDA'). لدينا :

$$V_{ABDA'} = \frac{S_{BDA'} \times h}{3} \Rightarrow h = \frac{3V_{ABDA'}}{S_{BDA'}} = \frac{\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}a \Rightarrow \boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{3}a}$$

التمرين الثالث :



1. تعيين مجال المتغير x

$$0 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow \boxed{x \in [0;4]}$$

2. حساب مساحة المثلث ALP

$$S_{ALP} = \frac{AL \times AP}{2} = \frac{2x(8-2x)}{2} = x(8-2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ALP} = -2x^2 + 8x}$$

3. حساب طول الضلع PL

$$PL^2 = AL^2 + AP^2 = (2x)^2 + (8-2x)^2 = 4x^2 + 16 - 32x + 4x^2$$

$$PL^2 = 8x^2 - 32x + 64 \Rightarrow \boxed{PL = \sqrt{8x^2 - 32x + 64}}$$

4. حساب بطريقتين مختلفتين مساحة المربّع LMNP

الطريقة الأولى :

$S_{LMNP} = PL^2 = \boxed{8x^2 - 32x + 64}$ (الضلع × الضلع)

الطريقة الثانية :

$$S_{LMNP} = 64 - 4 \times S_{ALP} = 64 - 4(-2x^2 + 8x) = \boxed{8x^2 - 32x + 64}$$

(مساحة المربع $ABCD$ ناقص مساحة المثلثات ALP, LBM, MCN, NDP)

II- $f(x) = 8x^2 - 32x + 64$

1. كتابة $f(x)$ على الشكل النموذجي

$$f(x) = 8x^2 - 32x + 64 = 8(x^2 - 4x + 8) = 8[(x-2)^2 - 4 + 8]$$

$f(x) = 8[(x-2)^2 + 4] \Rightarrow \boxed{f(x) = 8(x-2)^2 + 32}$

2. استنتاج أصغر قيمة للمساحة $A(x)$

بما أنّ $A(x) = f(x)$ ، فإنّ أصغر قيمة للمساحة $A(x)$ هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة f :

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 8(x-2)^2 + 32 \geq 32 \Rightarrow \boxed{f(x) \geq 32}$$

ومنه نستنتج أنّ أصغر قيمة للمساحة $A(x)$ هي $32\ cm^2$

3. جدول تغيرات الدالة f

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من المجال $[0;2]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$x_1 < x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (x_1-2)^2 > (x_2-2)^2$$
$$\Rightarrow 8(x_1-2)^2 + 32 > 8(x_2-2)^2 + 32 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

منه، الدالة f متناقصة على المجال $[0;2]$.

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقين من $[2;4]$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$2 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow (x_1-2)^2 < (x_2-2)^2$$
$$\Rightarrow 8(x_1-2)^2 + 32 < 8(x_2-2)^2 + 32 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

منه، الدالة f متزايدة على المجال $[2;4]$.

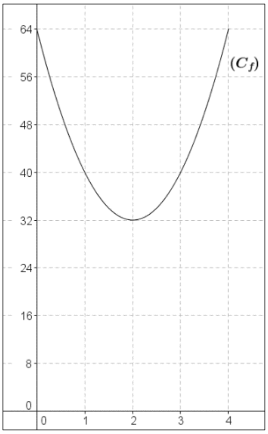
x	0		2		4
$f(x)$	64	$\searrow$	32	$\nearrow$	64

الدالة f ليست رتيبة لأنّها متناقصة على المجال $[0;2]$ ومتزايدة على المجال $[2;4]$

4. ملء الجدول

5. انشاء البيان (C_f) للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

x	$f(x)$
0	64
0,5	50
1	40
1,5	34
2	32
2,5	34
3	40
3,5	50
4	64



التمرين الرابع :

$A(5;0)$ ، $B(5;5)$ و $C(0;5)$ (انظر الشكل في نهاية التمرين)

1. **تعيين إحداثيات النقط A' ، B' ، C' و I منتصفات $[BC]$ ، $[CO]$ ، $[OA]$ و $[AB]$ على الترتيب**

$A'\left(\frac{x_B+x_C}{2};\frac{y_B+y_C}{2}\right)$ أي $A'\left(\frac{5}{2};\frac{10}{2}\right)$ ومنه $\boxed{A'\left(\frac{5}{2};5\right)}$

$B'\left(\frac{x_C+x_O}{2};\frac{y_C+y_O}{2}\right)$ أي $B'\left(\frac{0}{2};\frac{5}{2}\right)$ ومنه $\boxed{B'\left(0;\frac{5}{2}\right)}$

$C'\left(\frac{x_O+x_A}{2};\frac{y_O+y_A}{2}\right)$ أي $C'\left(\frac{5}{2};\frac{0}{2}\right)$ ومنه $\boxed{C'\left(\frac{5}{2};0\right)}$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ أي $I\left(\frac{10}{2};\frac{5}{2}\right)$ ومنه $\boxed{I\left(5;\frac{5}{2}\right)}$

2. **كتابة معادلات ديكارتية لكل من المستقيمات (AA') ، (BB') ، (CC') و (OI)**

لدينا : $\overrightarrow{AA'}\left(-\frac{5}{2};5\right)$ ، $\overrightarrow{BB'}\left(-5;-\frac{5}{2}\right)$ ، $\overrightarrow{CC'}\left(\frac{5}{2};-5\right)$ ، $\overrightarrow{OI}\left(5;\frac{5}{2}\right)$

$M(x;y)\in(AA')$ معناه $\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AA'}$ أي $5(x-5)+\frac{5}{2}y=0$ ومنه

$\boxed{(AA'):y=-2x+10}$

$M(x;y)\in(BB')$ معناه $\overrightarrow{BM}\parallel\overrightarrow{BB'}$ أي $-\frac{5}{2}(x-5)+5(y-5)=0$ ومنه

$\boxed{(BB'):y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}$

$M(x;y)\in(CC')$ معناه $\overrightarrow{CM}\parallel\overrightarrow{CC'}$ أي $-5x-\frac{5}{2}(y-5)=0$ ومنه

$\boxed{(CC'):y=-2x+5}$

$M(x;y)\in(OI')$ معناه $\overrightarrow{OM}\parallel\overrightarrow{OI}$ أي $\frac{5}{2}x-5y=0$ ومنه

$\boxed{(OI):y=\frac{1}{2}x}$

3. **استنتاج إحداثيي النقطة R تقاطع (AA') و (BB') و إحداثيي النقطة P تقاطع (CC') و (OI)**

$R(x;y)\in(AA')\cap(BB')$ معناه $\begin{cases}y=-2x+10\\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\end{cases}$ أي

$-2x+10=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ أي $\frac{5}{2}x=\frac{15}{2}$ إذن $x=3$ و $y=4$ ومنه $\boxed{R(3;4)}$

$P(x;y)\in(CC')\cap(OI)$ معناه $\begin{cases}y=-2x+5\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$ أي $-2x+5=\frac{1}{2}x$

أي $\frac{5}{2}x = 5$ إذن $x = 2$ و $y = 1$ ومنه $\boxed{P(2;1)}$

التحقق أنّ (AA') و (OI) يتقاطعان في $Q(4;2)$ وأنّ (BB') و (CC') يتقاطعان في $S(1;3)$

لدينا $\begin{cases} -2x_Q + 10 = 2 = y_Q \\ \frac{1}{2}x_Q = 2 = y_Q \end{cases}$ إذن $\begin{cases} Q \in (AA') \\ Q \in (OI) \end{cases}$ ومنه

$$\boxed{(AA') \cap (OI) = \{Q(4;2)\}}$$

ولدينا $\begin{cases} \frac{1}{2}x_S + \frac{5}{2} = 3 = y_S \\ -2x_S + 5 = 3 = y_S \end{cases}$ إذن $\begin{cases} S \in (BB') \\ S \in (CC') \end{cases}$ ومنه

$$\boxed{(BB') \cap (CC') = \{S(1;3)\}}$$

4. اثبات أنّ المستقيمين (PQ) و (RS) متوازيان وأنّ المستقيمين (PS) و (QR) متوازيان

$\overrightarrow{PQ}(2;1)$ ، $\overrightarrow{RS}(-2;-1)$. بما أنّ $\overrightarrow{RS} = -\overrightarrow{PQ}$ ، فهما مرتبطان خطّيا ومنه نستنتج أنّ المستقيمين (PQ) و (RS) متوازيان

$\overrightarrow{PS}(-1;2)$ ، $\overrightarrow{QR}(-1;2)$. بما أنّ $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ ، فهما مرتبطان خطّيا ومنه نستنتج أنّ المستقيمين (PS) و (QR) متوازيان

5. اثبات أنّ $PQ = PS$ وأنّ المستقيمين (PQ) و (PS) متعامدان

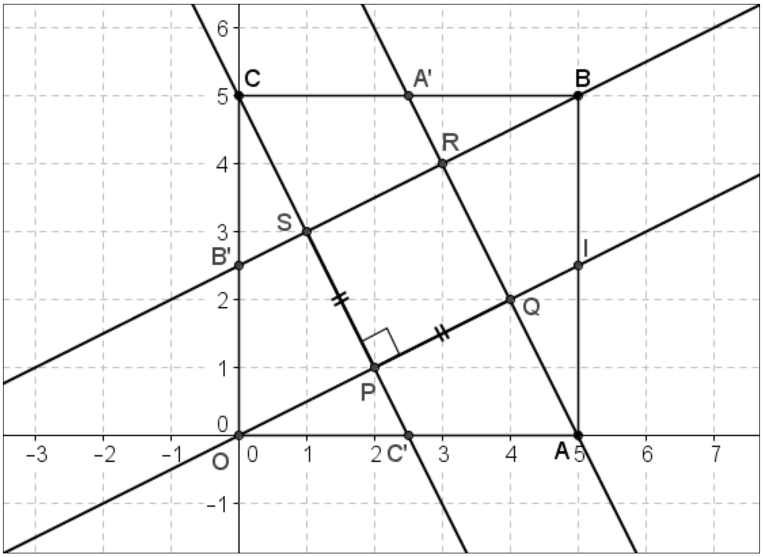
$$PQ = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \boxed{\sqrt{5}}$$

$$PS = \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$$

$QS^2 = (1-4)^2 + (3-2)^2 = 9 + 10 = 10$. بما أنّ $QS^2 = PQ^2 + PS^2$ فإنّ المثلث PQS قائم في P ، ومنه نستنتج أنّ المستقيمين (PQ) و (PS) متعامدان

6. استنتاج طبيعة الرباعي $PQRS$

المستقيمان (PQ) و (RS) متوازيان والمستقيمان (PS) و (QR) متوازيان أيضا ، إذن الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع ، وبما أنّ المثلث PQS قائم في P ومتساوي الساقين ، نستنتج أنّ الرباعي $PQRS$ مربّع.



C
A'
B
R
S
B'
I
Q
P
O
C'
A

الموضوع السادس

التمرين الأول :

$$A(x) = (2x-3)^2 - 4$$

1. التحقّق أنّ :

أ. $A(x) = 4x^2 - 12x + 5$

$A(x) = (2x-3)^2 - 4 = 4x^2 - 12x + 9 - 4$

$\boxed{A(x) = 4x^2 - 12x + 5}$

ب. $A(x) = (2x-5)(2x-1)$

$A(x) = (2x-3)^2 - 4 = (2x-3)^2 - 2^2 = (2x-3-2)(2x-3+2)$

$\boxed{A(x) = (2x-5)(2x-1)}$

2. باستعمال الصيغة الأنسب للعبارة $A(x)$:

أ. حساب : $A(0)$ ، $A\left(\frac{3}{2}\right)$ ، $A\left(-\frac{1}{2}\right)$

$A(0) = 4(0)^2 - 12(0) + 5 = \boxed{5}$

$A\left(\frac{3}{2}\right) = \left[2\left(\frac{3}{2}\right) - 3\right]^2 - 4 = (3-3)^2 - 4 = \boxed{-4}$

$A\left(\frac{1}{2}\right) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 5\right]\left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right] = (-4)(0) = \boxed{0}$

ب. حلّ المعادلات : $A(x) = 0$ ، $A(x) = 5$ ، $A(x) = 21$

$A(x) = 0 \Rightarrow (2x-5)(2x-1) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0$ أو $2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$ أو $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}}$

$A(x) = 5 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 5 = 5 \Rightarrow 4x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 4x(x-3) = 0$

$\Rightarrow 4x = 0$ أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $x = 3 \Rightarrow \boxed{S = \{0; 3\}}$

$A(x) = 21 \Rightarrow (2x-3)^2 - 4 = 21 \Rightarrow (2x-3)^2 - 5^2 = 0$

$\Rightarrow (2x-3-5)(2x-3+5) = 0 \Rightarrow (2x-8)(2x+2) = 0$

$\Rightarrow 2x - 8 = 0$ أو $2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$ أو $x = -1$

$\Rightarrow \boxed{S = \{-1; 4\}}$

التمرين الثاني :

$D(2m-1\,;\,-1)$ ، $C(-1\,;\,1)$ ، $B(3\,;\,0)$ ، $A(1\,;\,2)$

1. تعيين مجموعة قيم m بحيث :

أ. النقط A ، B ، D على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AD}(2m-2;-3)$ ، $\overrightarrow{AB}(2;-2)$

تكون النقط A ، B ، D على استقامة واحدة عندما يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطّيا أي $2(-3)+2(2m-2)=0$ أي $4m-10=0$ ،

ومنه $\boxed{m=\frac{5}{2}}$

ب. $-3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AD}(2m-2;-3)$ ، $\overrightarrow{BC}(-4;1)$

$$-3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{BC}\Rightarrow 2m-2=-12\Rightarrow\boxed{m=-5}$$

2. تعيين إحداثيتي النقطة A في المعلم $(B\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

$$\overrightarrow{AB}(2;-2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=2\vec{\imath}-2\vec{\jmath}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=-2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}\Rightarrow\boxed{A(-2;2)_{(B,\vec{\imath},\vec{\jmath})}}$$

3. بيان أنّ الثلاثية $\left(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$ معلم للمستوي

$2(-1)+2(-2)=-6$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-1)$ ، $\overrightarrow{AB}(2;-2)$

بما أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّيا فإنّ النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة ، ومنه نستنتج أنّ الثلاثية $\left(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$ معلم للمستوي

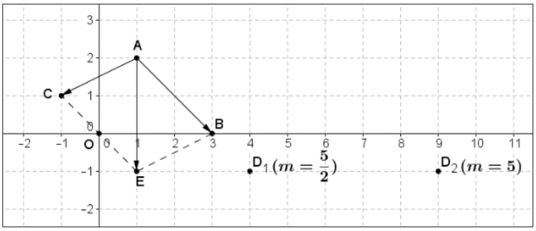
4. تعين إحداثيات النقطة E في المعلم $\left(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$

$$E(x;y)_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA}=x(2\vec{\imath}-2\vec{\jmath})+y(-2\vec{\imath}-\vec{\jmath})+\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$$

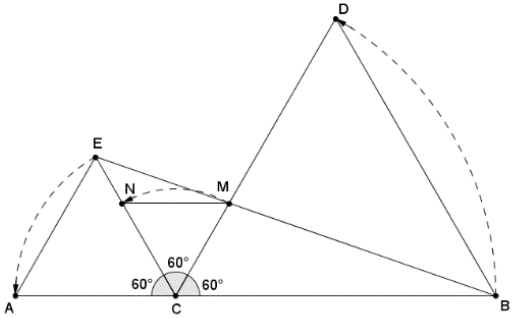
$$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=(2x-2y+1)\vec{\imath}+(-2x-y+2)\vec{\jmath}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}\ \left[E(1;-1)_{(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})}\ \text{لأنّ}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-2y+1=1\\-2x-y+2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2y=0\\-2x-y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{E(1;1)_{(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}}$$



التمرين الثالث :

-I



1. بيان أنّه يوجد دوران يحوّل النقط B ،M ، E إلى النقط D ، N ، A على الترتيب

بما أنّ المثلثات AEC ، BDC و MNC متقايسة الأضلاع ، فإنّ :

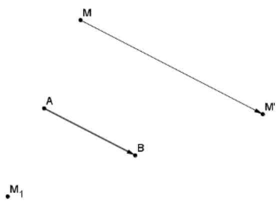
- $CB = CD$ و $\widehat{BCD} = 60°$ أي D صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $60°$
- $CN = CM$ و $\widehat{MCN} = 60°$ أي N صورة M بالدوران الذي مركزه C وزاويته $60°$
- $CA = CE$ و $\widehat{ECA} = 60°$ أي A صورة E بالدوران الذي مركزه C وزاويته $60°$

ومنه نستنتج أنّه يوجد دوران $\mathcal{R}$ يحوّل النقط B ، M ، E إلى النقط D ، N ، A على الترتيب مركزه C وزاويته $60°$

2. استنتاج أن النقط A ، N ، D في استقامية

بما أنّ النقط B ، M ، E في استقامية (لأنّ M تنتمي إلى $[EB]$) والنقط D ، N ، A هي صور النقط B ، M ، E على الترتيب بالدوران $\mathcal{R}$ ، نستنتج أنّ النقط D ، N ، A أيضا في استقامية لأنّ الدوران يحافظ على استقامية النقط

-II انشاء النقط M ، M₁ و M′



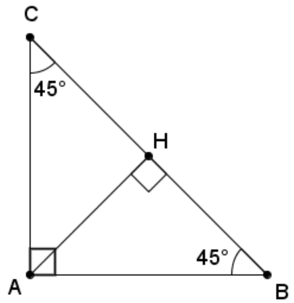
1. التعبير عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

لدينا : A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M'M_1]$ ، إذن (AB) هو مستقيم المنتصفين في المثلث MM_1M' ، ومنه نستنتج أنّ : $\boxed{\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}}$

2. استنتاج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ، إذن M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$ ،
ومنه نستنتج أنّ التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين هو انسحاب شعاعه ضعف الشعاع المشكّل من مركزي التناظر.

-III



1. **البرهان أنّ المثلثين ABC و HBA متشابهان**

لدينا : $\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = 45°$ و $\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90°$ ، منه نستنتج أنّ المثلثين ABC و HBA متشابهان (مثلثان لهما زاويتان متقايستان)

2. **تعيين نسبة التشابه الذي يحوّل المثلث ABC إلى المثلث HAB**

بما أنّ المثلثين ABC و HBA متشابهان فإنّ : $\frac{AH}{AB} = \frac{BH}{AC} = \frac{AB}{BC}$

وبما أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين فإنّ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}AB \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{\sqrt{2}AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومنه نستنتج أنّ نسبة التشابه الذي يحوّل المثلث ABC إلى المثلث HAB هي $\boxed{k = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

3. **حساب النسبة $\frac{S(HBA)}{S(ABC)}$**

الطريقة الأولى :

$$\frac{S(HBA)}{S(ABC)} = \frac{\frac{AH\times BH}{2}}{\frac{AB\times AC}{2}} = \frac{AH \times BH}{AB \times AC} = \frac{AH}{AB} \times \frac{BH}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

الطريقة الثانية :

بما أنّ نسبة التشابه هي $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، فإنّ النسبة $\frac{S(HBA)}{S(ABC)}$ هي $K^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(تُضرب الأطوال في k وتُضرب المساحات في k^2)

التمرين الرابع :

1. **انشاء A' و C' صورتي A و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه B وزاويته $90°$ في الاتجاه الموجب**
2. **تعيين طبيعة المثلث $A'BC'$**

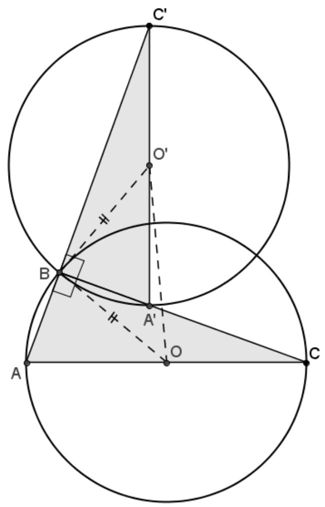
بما أنّ المثلث $A'BC'$ هو صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه B وزاويته $90°$ في الاتجاه الموجب ، نستنتج أنّه قائم في B لأنّ الدوران يحافظ على الأشكال ، الأطوال والزوايا

3. **انشاء O و O' مركزي الدائرتين المحيطتين بالمثلث ABC و $A'BC'$ على الترتيب**

بما أنّ المثلثين ABC و $A'BC'$ قائمان في B ، فإنّ O منتصف $[AC]$ و O' منتصف $[A'C']$

4. **حساب الطول OO'**

لدينا : O منتصف $[AC]$ و O' منتصف $[A'C']$ ، إذن O' هي صورة O بالدوران الذي مركزه B وزاويته $90°$ ، ومنه نستنتج أنّ المثلث OBO' قائم في B ومتساوي الساقين ، وبما أنّ $OB = OA = \frac{1}{2}AC = 3$ نستنتج أنّ : $OO'^2 = BO^2 + BO'^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ ومنه $\boxed{OO' = 3\sqrt{2}}$



الموضوع السابع

التمرين الأول :

1. **ترتيب القيم تصاعديا**

$3-4-4-4-4-4-4-4-4-5-5-5-5-5-5-5-5$
$5-6-6-6-6-6-7-7-7-7-7-7-7-7-8-8-8$
$8-8-8-9-9$

2. **وضع جدول إحصائي لهذه السلسلة مبيّنا التكرار ، التكرار المجمّع الصاعد ، التكرار المجمّع النازل و التواتر**

القيم	3	4	5	6	7	8	9
التكرار	1	8	9	5	8	6	2
ت م ص	1	9	18	23	31	37	39
ت م ن	39	38	30	21	16	8	2
التواتر	0,026	0,205	0,231	0,128	0,205	0,154	0,051

3. **حساب المتوسط الحسابي ، الوسيط و المنوال لهذه السلسلة**

$$\bar{x}=\frac{(3\times1)+(4\times8)+(5\times9)+(6\times5)+(7\times8)+(8\times6)+(9\times2)}{39}$$

$$\bar{x}=\frac{232}{39}\approx\boxed{5{,}9}$$

بما أنّ التكرار الكلي $N=39$ فإنّ رتبة الوسيط هي 20 ومنه : $\boxed{Med=6}$
منوال هذه السلسلة هو 5.

التمرين الثاني:

1. **التحقّق أنّ النقط A ، B ، C ليست في استقامية**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\ ;(-6)(-3)-(-8)(4)=50\neq0$$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطّيا ، منه النقط A ، B ، C ليست في استقامية

2. **بيان نوع المثلث ABC**

$$AB=\sqrt{(-4-2)^2+(-2-6)^2}=\sqrt{100}=\boxed{10}$$

$$AC=\sqrt{(6-2)^2+(3-6)^2}=\sqrt{25}=\boxed{5}$$

$$BC=\sqrt{(6+4)^2+(3+2)^2}=\sqrt{125}=\boxed{5\sqrt{5}}$$

بما أنّ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ، نستنتج أنّ المثلث ABE قائم في A

3. تعيين إحداثيي H مركز الدائرة (S) وحساب طول نصف قطرها

مركز الدائرة (S) المحيطة بالمثلث ABC هو منتصف الوتر $[BC]$ ، ومنه :

$$H\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow H\left(\frac{-4+6}{2}; \frac{-2+3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{H\left(1; \frac{1}{2}\right)}$$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

4. التحقّق أنّ النقطة K(2 ; -5) تنتمي إلى الدائرة (S)

نبيّن أنّ الطول $HK = r$

$$HK = \sqrt{(2-1)^2 + \left(-5 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{121}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \boxed{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

$$HK = r \Rightarrow \boxed{K \in (S)}$$

5. تعيين إحداثيي النقطة D منتصف القطعة [AB]

$$D\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow D\left(\frac{2-4}{2}; \frac{6-2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{D(-1; 2)}$$

6. كتابة معادلة المستقيم (Δ) محور القطعة [AB]

بما أنّ المستقيم (Δ) محور القطعة [AB] ، فإن $\overrightarrow{AC}$ شعاع توجيه لـ (Δ)

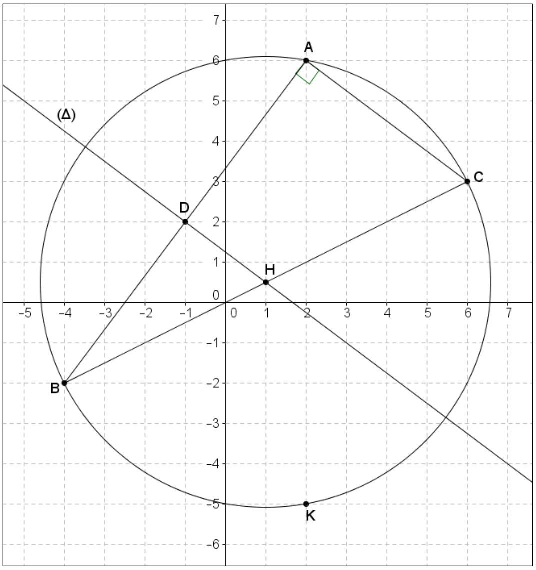
$M(x; y) \in (\Delta)$ معناه $\overrightarrow{DM} \parallel \overrightarrow{AC}$ أي $-3(x+1) - 4(y-2) = 0$ ،

أي $-3x - 4y + 5 = 0$ ، ومنه $\boxed{(\Delta): y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}}$

7. تعيين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (BC)

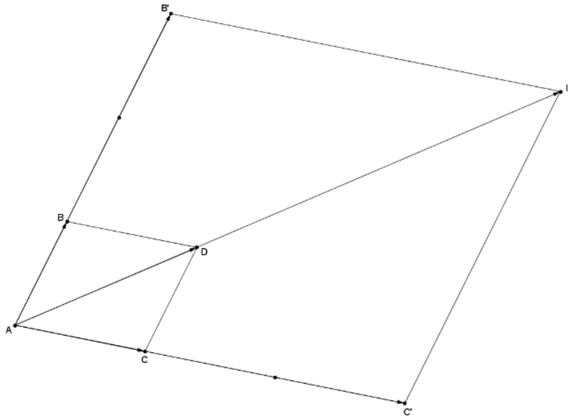
بما أنّ المستقيم (Δ) يشمل النقطة D منتصف القطعة $[AB]$ ويوازي (AC) فهو يقطع (BC) في النقطة H منتصف القطعة $[BC]$ حسب نظرية مستقيم المنتصفين ، ومنه :

$$\boxed{(\Delta) \cap (BC) = \{H\}}$$



التمرين الثالث :

I-



1. **انشاء النقطة D**
2. **انشاء النقط I ، B′ ، C′**
3. **المقارنة بين الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AI}$ واستنتاج أن النقط A ، I ، D في استقامية**

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AD}}$$

الشعاعان $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطان خطّيا ، منه نستنتج أن النقط A ، I ، D في استقامية

II- A(-5 ; 6) ، B(0 ; -3) ، C(7 ; -1) ، D(-5 ; -5)

1. حساب إحداثيي النقطة E المعرّفة بـ : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}$

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x\\y+3\end{pmatrix};\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-5-x\\-5-y\end{pmatrix};\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED}\Rightarrow\begin{cases}x=-5-x\\y+3=-5-y\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=-5\\2y=-8\end{cases}\Rightarrow\boxed{E\left(-\frac{5}{2};-4\right)}$$

2. حساب إحداثيي النقطة F بحيث يكون الرباعي ABCF متوازي أضلاع

يكون الرباعي $ABCF$ متوازي أضلاع إذا تحققت العلاقة : $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}$ ،

ومنه $\begin{cases}7-x_F=5\\-1-y_F=-9\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x_F=2\\y_F=8\end{cases}$ ومنه $\boxed{F(2;8)}$

3. حساب إحداثيي النقطة G المعرّفة بـ : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GD}$

$$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-5-x\\6-y\end{pmatrix};\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-x\\-3-y\end{pmatrix};\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-5-x\\-5-y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GD}\Rightarrow\begin{cases}-5-x-x=-15-3x\\6-y-3-y=-15-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-10\\y=-18\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{G(-10;-18)}$$

4. حساب قيمة y بحيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}10\\y-6\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AB}\Rightarrow-90-5(y-6)=0$$

$$\Rightarrow5(y-6)=-90\Rightarrow y-6=-18\Rightarrow y=-12\Rightarrow\boxed{M(5;-12)}$$

التمرين الرابع :

1. ب	2. ب	3. أ ، ب	4. أ ، ب	5. أ	6. أ ، ب ، ج
7. ج	8. أ ، ج	9. أ	10. أ	11. أ ، ب ، ج	12. ب

الموضوع الثامن

التمرين الأول :

المادة	اللغة العربية	اللغة الفرنسية	اللغة الانجليزية	تاريخ وجغرافيا	العلوم الإسلامية	العلوم الفيزيائية	العلوم الطبيعية	الرياضيات	التربية البدنية
المعامل	3	2	2	2	2	5	5	5	1
العلامة	x	10	12	14	13	9	12	y	16

1. حساب العلامة التي يجب أن يتحصّل عليها في مادة اللغة العربية بحيث يصبح معدّله النهائي 11

$$\bar{x} = \frac{3x + 20 + 24 + 28 + 26 + 45 + 60 + 37{,}5 + 16}{27} = \frac{3x + 256{,}5}{27}$$

$$\bar{x} = 11 \Rightarrow \frac{3x + 256{,}5}{27} = 11 \Rightarrow 3x + 256{,}5 = 297 \Rightarrow 3x = 40{,}5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 13{,}5}$$

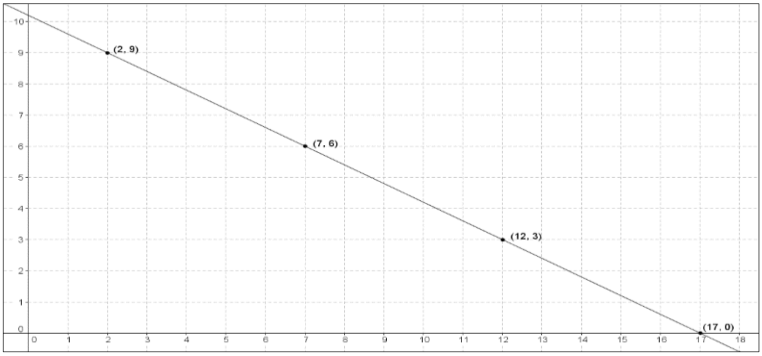
2. تعيين كل الأزواج $(x\,;\,y)$ الصحيحة الممكنة لعلامتي اللغة العربية والرياضيات بحيث يصبح معدّله النهائي 10

$$\bar{x} = \frac{3x + 20 + 24 + 28 + 26 + 45 + 60 + 5y + 16}{27} = \frac{3x + 5y + 219}{27}$$

$$\bar{x} = 10 \Rightarrow \frac{3x + 5y + 219}{27} = 10 \Rightarrow 3x + 5y + 219 = 270$$

$$\Rightarrow 3x + 5y = 51 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{5}x + \frac{51}{5}}$$

نرسم المستقيم ذي المعادلة $y = -\frac{3}{5}x + \frac{51}{5}$ ، ونعين عليه النقط ذات الإحداثيات الصحيحة



من التمثيل البياني نستنتج أنّ الأزواج $(x\,;y)$ الصحيحة الممكنة لعلامتي اللغة العربية والرياضيات بحيث يصبح معدّله النهائي 10 هي : $\boxed{(2,9) ، (7,6) ، (12,3) ، (17,0)}$

التمرين الثاني :

$$A(x)=(x-3)^2-\frac{9}{4}$$

1. نشر وتبسيط العبارة $A(x)$

$$A(x)=(x-3)^2-\frac{9}{4}=x^2-6x+9-\frac{9}{4}\Rightarrow \boxed{A(x)=x^2-6x+\frac{27}{4}}$$

2. استنتاج تحليل للعبارة : $x^2-6x+\frac{27}{4}$

$$x^2-6x+\frac{27}{4}=(x-3)^2-\frac{9}{4}=(x-3)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=\left(x-3-\frac{3}{2}\right)\left(x-3+\frac{3}{2}\right)=\boxed{\left(x-\frac{9}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

3. حلّ المتراجحة : $x^2-6x+\frac{27}{4}\geq 0$

$$x^2-6x+\frac{27}{4}\geq 0\Rightarrow\left(x-\frac{9}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\geq 0$$

$$x-\frac{9}{2}=0\Rightarrow x=\frac{9}{2}\ ;\ x-\frac{3}{2}=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$x-\frac{9}{2}$		-		-	0	+	
$x-\frac{3}{2}$		-	0	+		+	
$\left(x-\frac{9}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$		+	0	-	0	+	

$$\boxed{S=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2};+\infty\right[}$$

.4

أ. تعيين مجال x

بما أنّ قطر الدائرة هو 6 فإنّ x ينتمي إلى المجال $[0;3]$

ب. التعبير عن مساحة الأرضية الزهرية بدلالة x

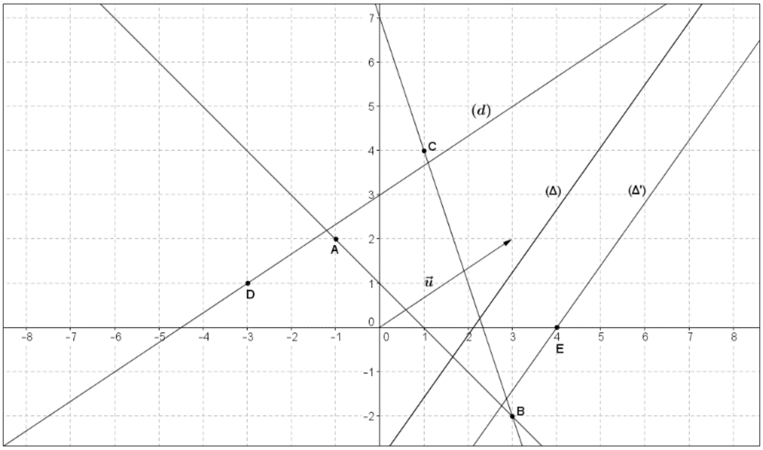
نسمي S المساحة الخضراء ، S_1 مساحة الأرضية الزهرية و S_2 المساحة الداخلية المتبقية. لدينا :

$$S_1 = S - S_2 = \pi \times 3^2 - \pi \times (3-x)^2 = \pi[9-(3-x)^2] = \boxed{\pi(6x - x^2)}$$

ج. تعيين قيم x التي من أجلها تكون مساحة الأرضية الزهرية أصغر من أو تساوي $\frac{3}{4}$ المساحة الخضراء

$$S_1 \leq \frac{3}{4}S \Rightarrow \pi(6x - x^2) \leq \frac{3}{4}(9\pi) \Rightarrow x^2 - 6x + \frac{27}{4} \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \in \left[0;\frac{3}{2}\right]}$$

التمرين الثالث :



1. كتابة معادلة لكل من المستقيمين (AB) و (BC)

$M(x;y) \in (AB)$ معناه $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ أي $-4(x+1) - 4(y-2) = 0$

ومنه $-4x - 4y + 4 = 0$ أي $\boxed{(AB): y = -x + 1}$

$M(x;y) \in (BC)$ معناه $\overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{BC}$ أي $6(x-3) + 2(y+2) = 0$ ومنه

$6x + 2y - 14 = 0$ أي $\boxed{(BC): y = -3x + 7}$

2. كتابة معادلة للمستقيم (d) الذي يشمل النّقطة D و $\vec{u}$ شعاع توجيه له

$M(x;y) \in (d)$ معناه $\overrightarrow{DM} \parallel \vec{u}$ أي $2(x+3) - 3(y-1) = 0$ ومنه

$2x - 3y + 9 = 0$ أي $\boxed{(d): y = \frac{2}{3}x + 3}$

3. كتابة معادلة للمستقيم (Δ') الذي يوازي المستقيم (Δ) ويقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها 4

$$(\Delta') \parallel (\Delta) \Rightarrow (\Delta'): y = \sqrt{2}x + b$$

$$E(4;0) \in (\Delta') \Rightarrow 0 = 4\sqrt{2} + b \Rightarrow b = -4\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{(\Delta'): y = \sqrt{2}x - 4\sqrt{2}}$$

4. حل الجمل الآتية ، وتمثيل الحلول بيانيا

$$(1):\begin{cases} x+y=6 \\ -2x+y=0 \end{cases} ;\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3$$

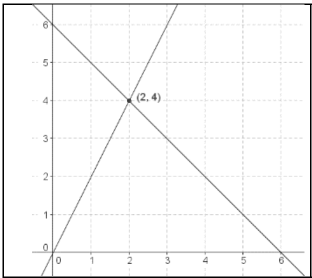
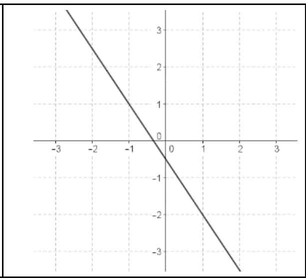
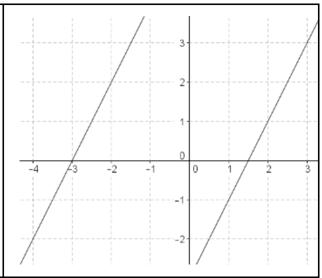
$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3}{2}=2\ ;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{3}=\frac{12}{3}=4; c$$

$$(2):\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -6x-4y=2 \end{cases} ;\ \Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}=0$$

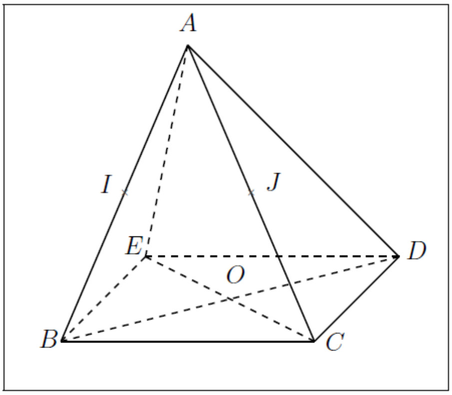
$$-\frac{6}{3}=-\frac{4}{2}=-\frac{2}{1}=-2 \xrightarrow[\text{الجملة تقبل ما لا نهاية من الحلول}]{} \boxed{S_{(2)}=\{(x;y); 3x+2y=-1\}}$$

$$(3):\begin{cases} 2x-y=3 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=\frac{3}{2} \end{cases} ;\ \Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}=0$$

$$\frac{2}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\frac{1}{4}}=-4\ ;\ \frac{3}{\frac{3}{2}}=2 \xrightarrow[\text{الجملة لا تقبل الحلول}]{} \boxed{S_{(3)}=\emptyset}$$

		
$S_{(1)}=\{(2;4)\}$	$S_{(2)}=\{(x;y); 3x+2y=-1\}$	$S_{(3)}=\emptyset$

التمرين الرابع :



1. **تعيين التقاطعات**
   أ. تقاطع المستويين (ABC) و (ACD) هو المستقيم (AC)
   ب. تقاطع المستويين (ABD) و (AEC) هو المستقيم (AO)
   ج. تقاطع المستقيم (AO) والمستوي (BED) هي النقطة O
2. **اثبات أنّ المستقيمين (IJ) و(ED) متوازيان**
في المثلث ABC ، (IJ) هو مستقيم المنتصفين ، وبالتالي فإنّه يوازي (BC)
وبما أنّ (BC) يوازي (ED) نستنتج أنّ المستقيمين (IJ) و(ED) متوازيان
3. **استنتاج تقاطع المستويين (ABC) و(EID)**
بما أنّ $(ED) \parallel (IJ)$ فإنّ المستقيم (IJ) محتوى في المستوي (EID) ،
ومنه نستنتج أنّ تقاطع المستويين (ABC) و(EID) هو المستقيم (IJ)
4. **اثبات أنّ المستقيم (IJ) والمستوي (BCD) متوازيان**
بما أنّ $(BC) \parallel (IJ)$ و(BC) محتوى في المستوي (BCD) ، نستنتج أنّ المستقيم (IJ) والمستوي (BCD) متوازيان.

الموضوع التاسع

التمرين الأول :

1. **تعليم النقط A ، B ، C**
2. **تعيين إحداثيي النقطة I منتصف $[AC]$**

لدينا : $x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$ و $y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ، منه $\boxed{I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$

3. **تعيين إحداثيي النقطة D التي تحقق : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$**

$\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ معناه $\begin{cases} x_D - x_I = \frac{1}{2}(x_D - x_B) \\ y_D - y_I = \frac{1}{2}(y_D - y_B) \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2x_D - 2x_I = x_D - x_B \\ 2y_D - 2y_I = y_D - y_B \end{cases}$

منه $\begin{cases} x_D = 2x_I - x_B \\ y_D = 2y_I - y_B \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_D = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = 0 \\ y_D = 2\left(\frac{1}{2}\right) - (-1) = 2 \end{cases}$ ومنه $\boxed{D(0;2)}$

4. **تعيين معادلة ديكارتية للمستقيم (d) الذي يشمل I ويوازي الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$**

$M(x;y) \in (d)$ معناه $\overrightarrow{IM} \parallel \vec{V}$ أي $-1\left(x+\frac{1}{2}\right) - 1\left(y-\frac{1}{2}\right) = 0$ ومنه :

$\boxed{(d): x + y = 0}$

5. **التحقق من أنّ : $-x + y = 2$ هي معادلة للمستقيم (CD)**

لدينا : $-x_C + y_C = -(-2) + 0 = 2$ و $-x_D + y_D = 0 + 2 = 2$ ،

منه نتحقق أنّ $-x + y = 2$ هي معادلة للمستقيم (CD)

6. **دراسة الوضعية النسبية للمستقيمين (d) و(CD)**

لدينا : $(d): y = -x$ و $(CD): y = x + 2$ ، منه جداء ميلي المستقيمين هو :

$a \times a' = (-1) \times 1 = -1$ إذن نستنتج أنّ المستقيمين (d) و(CD) متعامدان

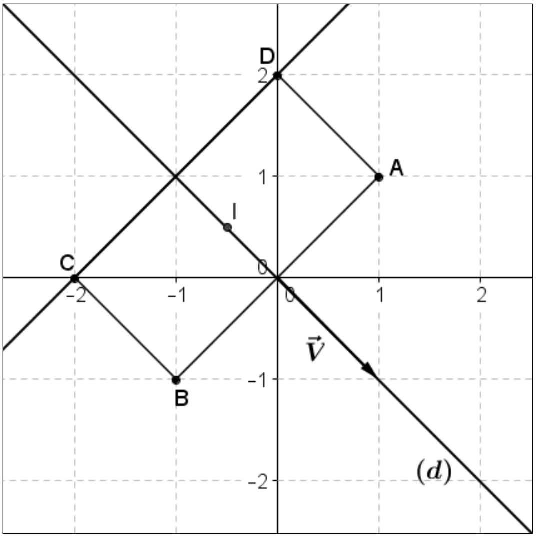
7. **حساب الطولين IA وIB واستنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$**

$$IA = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

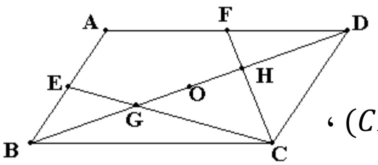
$$IB = \sqrt{\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

لدينا : I منتصف $[AC]$ و I منتصف $[BD]$ و $IA = IB$ ، إذن القطران $[AC]$ و$[BD]$ متناصفان ومتقايسان

وبما أنّ المستقيمين (d) و(CD) متعامدان ، نستنتج أنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل (لأنّ $(d) \parallel (AD)$).



التمرين الثاني :



1. **بيان أنّ النّقطة G هي مركز ثقل المثلّث ABC**

لدينا : E منتصف $[AB]$ و O منتصف $[AC]$ ،
ومنه النقطة G هي تقاطع المتوسطين (BO) و (CE) ،
فهي إذن مركز ثقل المثلث ABC

2. **التعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{GO}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{BG}$**

$$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GO}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GO} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GO}}$$

3. **التعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{HO}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{DH}$**

لدينا : F منتصف $[AD]$ و O منتصف $[AC]$ ، ومنه النقطة H هي تقاطع المتوسطين (DO) و (CF) ، فهي إذن مركز ثقل المثلث ADC

$$\overrightarrow{DH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DO} \Rightarrow \overrightarrow{DH}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HO}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HO} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{HO}}$$

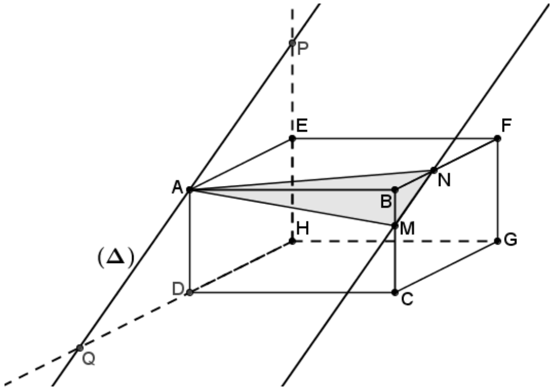
4. **استنتاج أنّ $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HD}$**

لدينا : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}$ و $\overrightarrow{DH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DO}$ و $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$ ، منه : $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{HD}$

ولدينا أيضا : $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GO}$ و $\overrightarrow{DH}=2\overrightarrow{HO}$ و $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{HD}$ ، إذن :

$\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}$ ، ومنه نستنتج أنّ : $\boxed{\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HD}}$.

التمرين الثالث :



1. **تعيين تقاطع المستوي (ANM) مع كل من المستويات :**
(ABC) ، (ABF) ، (BCF)
- تقاطع المستويين (ANM) و(BCF) هو المستقيم (MN)
- تقاطع المستويين (ANM) و(ABF) هو المستقيم (AN)
- تقاطع المستويين (ANM) و(ABC) هو المستقيم (AM)

2. **ذكر الأوضاع النسبية :**
أ. المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (ANM)
ب. المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (ADE)
ج. المستقيم (Δ) والمستقيم (EH) يتقاطعان في النقطة P
د. المستقيم (Δ) والمستقيم (HD) يتقاطعان في النقطة Q

3. **استنتاج تقاطع المستويين (ANM) و(ADE)**
تقاطع المستويين (ANM) و(ADE) هو المستقيم (Δ) لأنّه محتوى في كلا المستويين.

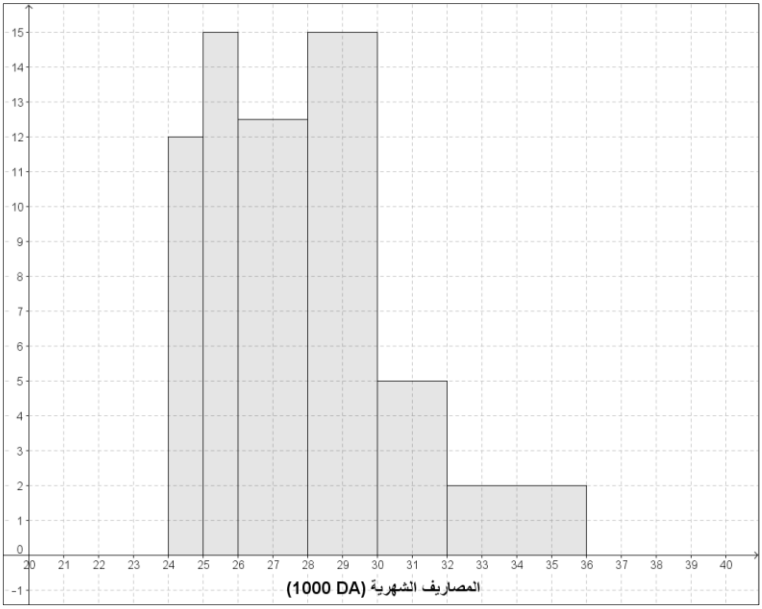
التمرين الرابع :

1. **اكمال الجدول**

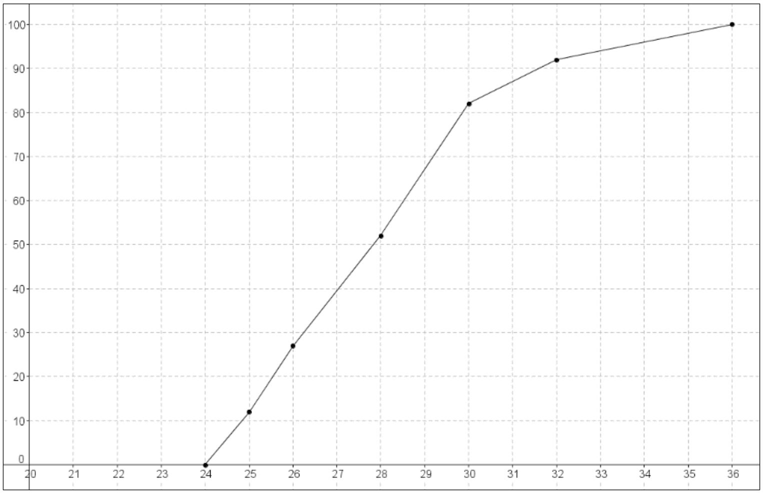
المصاريف الشهرية (10^3DA)	من 24 إلى 25	من 25 إلى 26	من 26 إلى 28	من 28 إلى 30	من 30 إلى 32	من 32 إلى 36
عدد العائلات	12	15	25	30	10	8
التكرار م ص	12	27	52	82	92	100
التكرار م ن	100	88	73	48	18	8
التواتر	0,12	0,15	0,25	0,3	0,1	0,08

التواتر م ص	0,12	0,27	0,52	0,82	0,92	1
التواتر م ن	1	0,88	0,73	0,48	0,18	0,08
مركز الفئة	24500	25500	27000	29000	31000	34000
معامل التعديل E_k	1	1	2	2	2	4
ارتفاع المستطيل	12	15	12,5	15	5	2

2. رسم المدرّج التكراري



رسم مضلّع التكرارات المجمعة الصاعدة



3. حساب متوسط المصاريف الشهرية للعائلات

$$\bar{x} = \frac{(24500 \times 12) + (25500 \times 15) + (27000 \times 25) + (29000 \times 30) + (31000 \times 10) + (34000 \times 8)}{100}$$

$\boxed{\bar{x} = 28035\ DA}$

4. حساب المنوال ، الوسيط ومدى لهذه السلسلة

الفئة المنوالية هي : $\boxed{[28000; 30000[}$

مدى هذه السلسلة هو : $\boxed{36000 - 24000 = 12000}$

بما أنّ التكرار الكلي هو 100 ، فإنّ رتبة الوسيط هي 50 والفئة الوسيطية هي $[26000; 28000[$ ، ومنه :

$$Med = 26000 + \frac{23 \times 2000}{25} = \boxed{27840}$$

حيث تمثل الأعداد 26000 ، 23 ، 2000 و 25 على الترتيب : الحد الأدنى للفئة الوسيطية $[\underline{\mathbf{26000}}; 28000[$، رتبة الوسيط في الفئة الوسيطية $(\mathbf{23} = 50 - 27)$، طول الفئة الوسيطية $(\mathbf{2000} = 28000 - 26000)$ وأخيرا تكرار الفئة الوسيطية.

الموضوع العاشر

التمرين الأول :

1. تعيين عبارة الدالة f حيث : $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ f(1) = -1 \\ f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c \\ a + b + c = -1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -bx = bx \\ a + b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x^2 - 3}$$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0 ; +\infty[$ واستنتاج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$

ليكن x_1 و x_2 عددين حقيقيين من المجال $[0; +\infty[$ حيث $x_1 < x_2$. لدينا :

$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 2x_1^2 - 3 < 2x_2^2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

منه الدالة f متزايدة على المجال $[0; +\infty[$ ، وبما أنّها زوجية فهي متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$ ، ويكون جدول تغيراتها كالآتي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	-3	↗	

3. إعطاء جدول لبعض قيم الدالة f وانشاء المنحنى (C_f)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	15	5	-1	-3	-1	5	15

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

4. $A(-1 ; -1)$ و $B(2 ; 5)$

أ. كتابة عبارة الدالة g

$$g(x) = ax + b \; ; \begin{cases} g(-1) = -1 \\ g(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -1 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

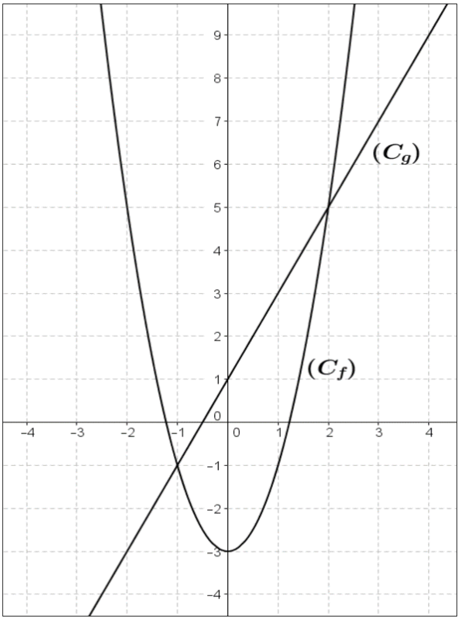
$$\Rightarrow \boxed{g(x) = 2x + 1}$$

جدول تغيراتها

الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (لأنّ $a > 0$)

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		↗	

ب. رسم تمثيلها البياني



ج. استنتاج الحلول البيانية للمعادلة $2x^2-2x-4=0$ و للمتراجحة $2x^2-2x-4\leq 0$

$$2x^2-2x-4=0 \Rightarrow (2x^2-3)-(2x+1)=0 \Rightarrow f(x)-g(x)=0$$

$$\Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow \boxed{S=\{-1;2\}}$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)

$$2x^2-2x-4\leq 0 \Rightarrow (2x^2-3)-(2x+1)\leq 0 \Rightarrow f(x)-g(x)\leq 0$$

$$\Rightarrow f(x)\leq g(x) \Rightarrow \boxed{S=[-1;2]}$$

حلول المتراجحة السابقة هي فواصل النقط حيث (C_f) تحت (C_g)

التمرين الثاني :

$$\begin{cases} x+ky=100k-50 \\ 5x+(2k+6)y=200k+89 \end{cases}$$

1. **الإجابة بصحيح أم خاطئ مع التعليل :**

أ. محدد هذه الجملة هو $3k-6$: خطأ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & k \\ 5 & 2k+6 \end{vmatrix}=(2k+6)-5k=\boxed{-3k+6}$$

ب. هذه الجملة ليس لها حل من أجل $k=2$: صحيح

$$\begin{cases} x+2y=150 \\ 5x+10y=489 \end{cases} \xRightarrow[\text{نضرب المعادلة الأولى في } (5)]{} \begin{cases} 5x+10y=750 \\ 5x+10y=489 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\emptyset}$$

ج. الثنائية (37،13) حل لهذه الجملة من أجل $k = 1$: صحيح

$$k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 5x + 8y = 289 \end{cases} ; \begin{cases} 37 + 13 = 50 \\ 5(37) + 8(13) = 289 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{(37;13)\}}$$

2. **تعيين عدد كل من الطلبة والعمال**

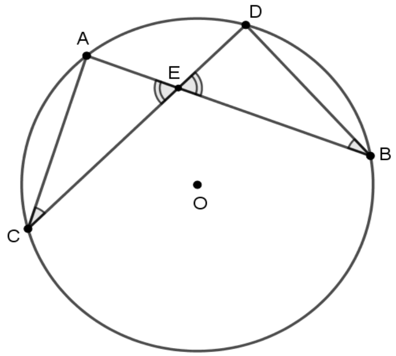
ليكن x عدد الطلبة و y عدد العمال. لدينا :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 500x + 800y = 28900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 5x + 8y = 289 \end{cases}$$

من الإجابة 1.ج نستنتج أنّ عدد الطلبة 37 وعدد العمال 13.

التمرين الثالث :

1. **انشاء الشكل**



2. **بيان أنّ المثلثين ACE وDEB متشابهان**

لدينا : $\widehat{AEC} = \widehat{BED}$ (زاويتان متقابلتان بالرأس) و $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ (زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AD) ، منه نستنتج أنّ المثلثين ACE و DEB متشابهان

3. **اثبات أنّ $DB \times AE = AC \times DE$**

بما أنّ المثلثين ACE و DEB متشابهان فإنّ : $\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{DB}$ ، ومنه :

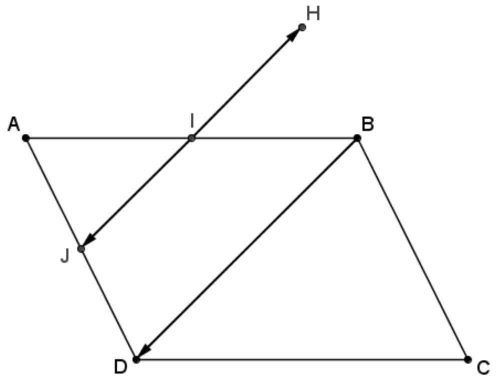
$$\boxed{DB \times AE = AC \times DE}$$

4. **حسب الطول DB**

$$DB = \frac{AC \times DE}{AE} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4} = \frac{7}{2} = \boxed{3,5}$$

التمرين الرابع :

1. إنشاء الشكل



2. كتابة كل من الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ} = \boxed{2\left(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}\right)}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = \boxed{\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}}$$

3. استنتاج أنّ الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطّيا

لدينا : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ ، منه نستنتج أنّ الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطّيا

4. برهان أنّ النقط H ، J ، I في استقامية

لدينا : $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{IJ}$

منه I منتصف $[JH]$ ، إذن نستنتج أنّ النقط H ، J ، I في استقامية.

الموضوع الحادي عشر

التمرين الأول:

$A(0;-1)$ ، $B(-2;1)$ ، $\overrightarrow{OD}=-4\vec{i}-\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-2)$.

1. أ. **تعيين إحداثيات النقطتين C و D.**

$$\begin{cases}x_C-x_A=-2\\ y_C-y_A=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=x_A-2\\ y_C=y_A-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=-2\\ y_C=-3\end{cases}\Rightarrow\boxed{C(-2;-3)}$$

$$\overrightarrow{OD}=-4\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow\boxed{D(-4;-1)}$$

ب. **بيان أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.**

$$\overrightarrow{AB}(-2;2)\Rightarrow\boxed{AB=\sqrt{8}}\ ;\ \overrightarrow{AC}(-2;-2)\Rightarrow\boxed{AC=\sqrt{8}}$$

$$\overrightarrow{BC}(0;-4)\Rightarrow\boxed{BC=4}$$

$$\begin{cases}BC^2=AB^2+AC^2\\ AB=AC\end{cases}\Rightarrow\boxed{\text{المثلث } ABC \text{ قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين}}$$

2. أ. **كتابة معادلة المستقيم (BC).**

$$x_B=x_C=-2\Rightarrow\boxed{(BC):x=-2}$$

ب. **هل النقطة D تنتمي إلى المستقيم (BC)؟**

$$x_D\neq-2\Rightarrow\boxed{D\notin(BC)}$$

3. **كتابة معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و $\vec{u}(-3;1)$ شعاع توجيه له.**

$$M(x;y)\in(\Delta)\Rightarrow\overrightarrow{DM}\parallel\vec{u}\Rightarrow(x+4)(1)+(y+1)(3)=0$$
$$\Rightarrow\boxed{x+3y+7=0}$$

4. **بيان أنّ المستقيمين (BC) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة يُطلب تعيينها.**

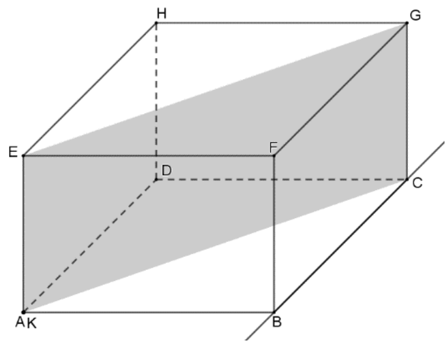
بما أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطّيا، فإنّ المستقيمين (BC) و (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة نسميها E حيث:

$$E(x;y)\in(BC)\cap(\Delta)\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ x+3y+7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow\boxed{E\left(-2;-\frac{5}{3}\right)}$$

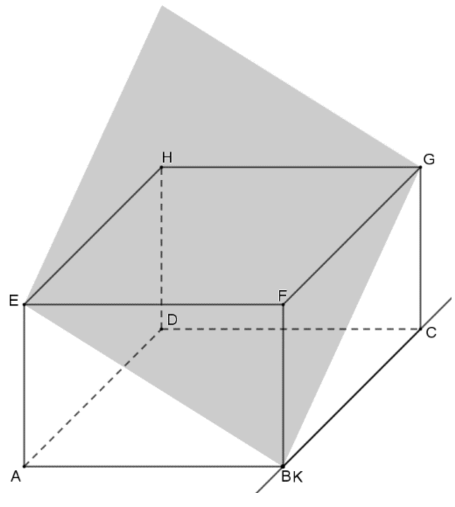
التمرين الثاني:

1. **تحديد التقاطع في حالة K منطبقة على:**

أ. النقطة A : عندما تنطبق النقطة K على النقطة A ينطبق المستوي (EKG) على المستوي $(ACGE)$ ويتقاطع مع المستقيم (BC) في النقطة C.



ب. النقطة B : عندما تنطبق النقطة K على النقطة B ينطبق المستوي (EKG) على المستوي (EBG) ويتقاطع مع المستقيم (BC) في النقطة B.

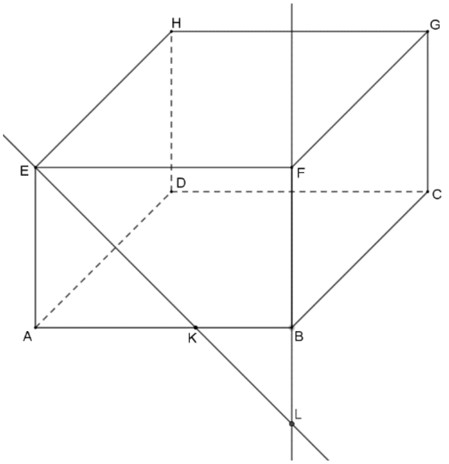


2. **نعتبر K في القطعة المستقيمة المفتوحة $]AB[$.**

أ. بما أنّ المستقيم (KG) تخترق متوازي المستطيلات فإنّ القطعة $[KG]$ ليست على أحد أوجه متوازي المستطيلات.

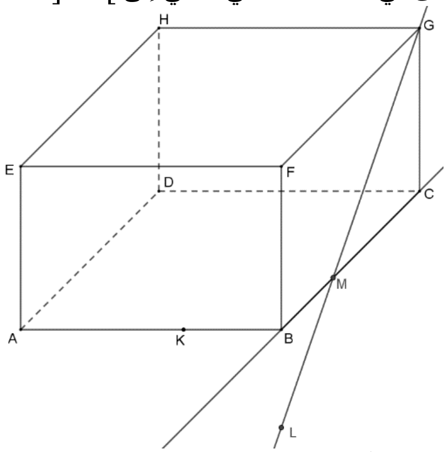
ب. انشاء النقطة L تقاطع المستقيم (EK) مع المستقيم (FB).

(EK) و(FB) مستقيمان غير متوازيين من المستوي $(ABFE)$، فهما يتقاطعان في النقطة L.



ج. **تبرير تقاطع المستقيم (GL) مع المستقيم (BC).**

(GL) و(BC) مستقيمان غير متوازيين من المستوي $(BCGF)$، فهما يتقاطعان في النقطة M التي تنتمي إلى $]BC[$.



د. **استنتاج المطلوب.**

بما أنّ $L \in (EK)$ فإنّ المستوي (EKG) هو نفسه المستوي (ELG) وتكون نقطة تقاطع المستوي (EKG) مع المستقيم (BC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم (GL) مع المستقيم (BC) وهي النقطة M.

ومنه نستنتج أنّ:

$K = A: (EKG) \cap (BC) = \{C\}$

$K = B: (EKG) \cap (BC) = \{B\}$

$K \in]AB[: (EKG) \cap (BC) = (GL) \cap (BC) = \{M\}\, ; M \in]BC[$

3. **حساب حجم رباعي الوجوه $BFEG$.**

$$\mathcal{V}_{BFEG} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{BFE} \times FG = \frac{1}{3} \times \frac{FB \times FE}{2} \times FG = \frac{2{,}5 \times 4 \times 3}{6} = \boxed{5\ cm^3}$$

التمرين الثالث:

1. **انشاء الشكل**
2. **تعيين طبيعة المثلث OAB وحساب طول الوتر $[AB]$**

بما أنّ $OA = OB = r$ فإنّ المثلث OAB متساوي الساقين.

في المثلث AOH القائم في H لدينا:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

وبما أنّ المثلث OAB متساوي الساقين فإنّ (OH) هو المتوسط المتعلق بالضلع $[AB]$

أي أنّ النقطة H منتصف $[AB]$ ومنه نستنتج أنّ $\boxed{AB = 8}$

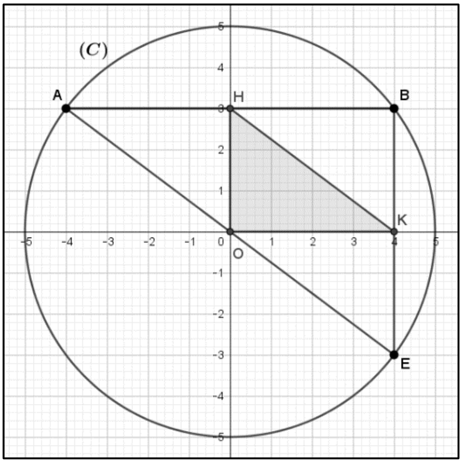
3. **تعيين طبيعة المثلث ABE وحساب الطول BE**

بما أنّ المثلث ABE مرسوم داخل الدائرة (C) و$[AE]$ قطر لها، نستنتج أنّ المثلث ABE قائم في B.

$$BE^2 = AE^2 - AB^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow \boxed{BE = 6}$$

4. **بيان أنّ المثلثين KOH و ABE متشابهان وتعيين نسبة التشابه.**

$$\begin{cases} \widehat{KOH} = \widehat{ABE} \\ \dfrac{OH}{EB} = \dfrac{OK}{AB} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{المثلثان } KOH \text{ و } ABE \text{ متشابهان } \left(k = \frac{1}{2}\right)}$$



التمرين الرابع:

1. **ترتيب النتائج السابقة ترتيبا تصاعديا وتلخيصها في جدول.**

0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 1 1 1 1 1 1,5
1,5 1,5 2 2 2 2 2,5 2,5 3 3 3

القيمة	0,5	1	1,5	2	2,5	3
التكرار	6	5	3	4	2	3

2. حساب الوسط الحسابي $\bar{x}$ والوسيط Med لهذه السلسلة الإحصائية.

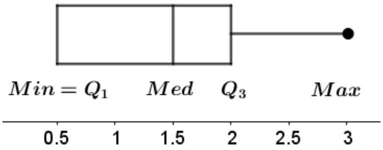
$$\bar{x} = \frac{0,5 \times 6 + 1 \times 5 + 1,5 \times 3 + 2 \times 4 + 2,5 \times 2 + 3 \times 3}{23} = \boxed{1,5}$$

بما أنّ $N = 23$ فإنّ رتبة الوسيط هي 12، ومنه: $\boxed{Med = 1,5}$

3. حساب كلا من الربعي الأول Q_1 والربعي الثالث Q_3

بما أنّ $\frac{N}{4} = 5,75$ و $\frac{3N}{4} = 17,25$ ، فإنّ Q_1 هي القيمة ذات الرتبة 6 و Q_3 هي القيمة ذات الرتبة 18 ومنه: $\boxed{Q_1 = 0,5 \text{ و } Q_3 = 2}$

انشاء المخطط بالعلبة لهذه السلسلة الإحصائية.



4. حساب النسبة المئوية للقيم المحصورة بين Q_1 و Q_3.

لدينا 18 قيمة محصورة بين 0,5 و2، ومنه نستنتج أنّ النسبة المئوية للقيم المحصورة بين Q_1 و Q_3 هي: $\boxed{\frac{18}{23} \times 100 = 78,26\%}$.

الموضوع الثاني عشر

التمرين الأول:

1. **تحديد الوضع النسبي في الحالات الآتية مع التبرير:**

أ. المستقيمان (ED) و(BC) لا ينتميان لنفس المستوي لأنهما غير متوازيين، غير متطابقين وغير متقاطعين.

ب. (DE) و(DC) مستقيمان متعامدان من المستوي (CDE) ويتعامدان في النقطة D.

ج. بما أنّ المستوي (EFC) هو نفسه المستوي $(EFCD)$، والمستقيم (AB) يوازي المستقيمين (DC) و(EF) و لا ينتمي للمستوي $(EFCD)$، نستنتج أنّ المستقيم (AB) يوازي المستوي (EFC).

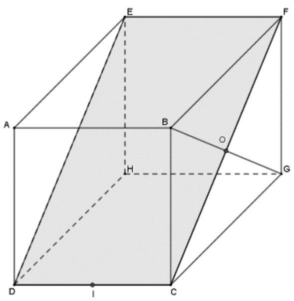
د. بما أنّ المستوي (DGH) هو نفسه المستوي $(DCGH)$ ، والمستوي (DEI) هو نفسه المستوي $(DCFE)$ ، نستنتج أنّ المستويين (DGH) و(DEI) يتقاطعان في المستقيم (DC).

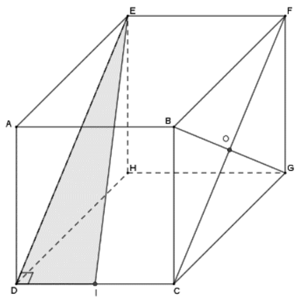
2. **تعيين طبيعة الرباعي $DEFC$.**

بما أنّ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ و$\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{DE}$، نستنتج أنّ الرباعي $DEFC$ مستطيل.

أ. **استنتاج طبيعة المثلث DEI**

بما أنّ $\overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{DE}$ و$DI \neq DE$، نستنتج أنّ المثلث DEI قائم في D.





ب. **حساب طول القطعة $[IE]$**

$$IE^2 = DI^2 + DE^2 = \left(\frac{1}{2}DC\right)^2 + DA^2 + AE^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 = 36$$

$$\Rightarrow \boxed{IE = 6\ cm}$$

3. **تحديد طبيعة المجسّم $OAEHD$ وحساب حجمه.**

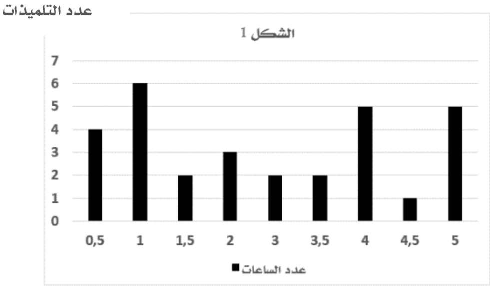
$OAEHD$ هرم رأسه O وقاعدته المربّع $AEHD$.

$$\mathcal{V}_{OAEHD} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{AEHD} \times h = \frac{4 \times 4}{3} \times 4 = \frac{64}{3} \approx \boxed{21{,}33\ cm^3}$$

التمرين الثاني:

1. اكمال المخطط 1.

$$\begin{cases} a = 2b \\ a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 3b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$



2. $a = 6$ و $b = 3$.

أ. حساب المدى، الوسط الحسابي والوسيط لهذه السلسلة.

المدى $= 5 - 0{,}5 = \boxed{4{,}5}$

$$\bar{x} = \frac{0{,}5 \times 4 + 1 \times 6 + 1{,}5 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 3{,}5 \times 2 + 4 \times 5 + 4{,}5 \times 1 + 5 \times 5}{30}$$

$\boxed{\bar{x} = 2{,}65}$

بما أنّ $N = 30$ فإنّ الوسيط هو معدل القيمتين ذات الرتبتين 15 و 16 ومنه:

$$Med = \frac{2 + 3}{2} = \boxed{2{,}5}$$

ب. تعيين الوسط الحسابي.

$$\bar{x} = 2 \times 2{,}65 = \boxed{5{,}3}$$

.3

أ. انشاء المدرج التكراري.

الفئة	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$
التكرار	4	8	3	4	6	5

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

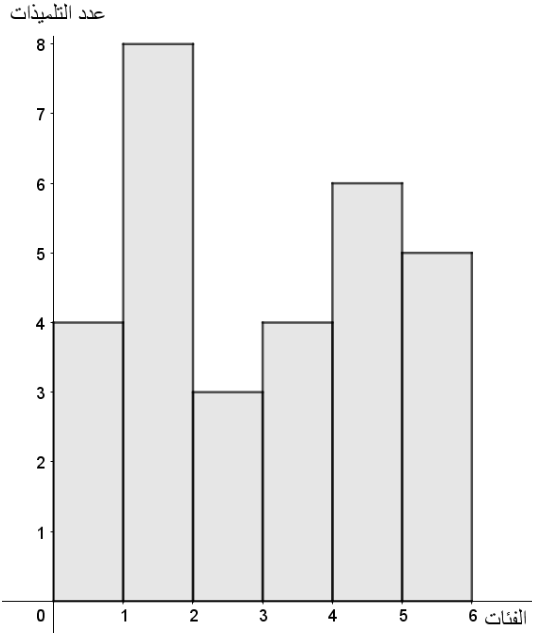
ب. حساب الوسط الحسابي والوسيط لهذه السلسلة.

الفئة	$[0; 1[$	$[1; 2[$	$[2; 3[$	$[3; 4[$	$[4; 5[$	$[5; 6[$
التكرار	4	8	3	4	6	5
المركز	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
ت م ص	4	12	15	19	25	30

$$\bar{x} = \frac{0{,}5 \times 4 + 1{,}5 \times 8 + 2{,}5 \times 3 + 3{,}5 \times 4 + 4{,}5 \times 6 + 5{,}5 \times 5}{30} = \boxed{2{,}8}$$

بما أنّ $N = 30$ فإنّ رتبة الوسيط هي 15 والفئة الوسيطية هي $[2;3[$ ومنه:

$$Med = 2 + \frac{3 \times 1}{8} = \boxed{2,375}$$



التمرين الثالث:

$(\Delta_m): (m+2)x + (m^2-4)y + 1 = 0$.

1. **تعيين معادلة كل من المستقيمين (Δ_0) و(Δ_1) وتمثيلهما**

$(\Delta_0): 2x - 4y + 1 = 0\ ;\ (\Delta_1): 3x - 3y + 1 = 0$

2. **تعيين نقطة تقاطع المستقيمين (Δ_0) و(Δ_1) حسابيا والتحقق من ذلك بيانيا.**

$$I(x;y) \in (\Delta_0) \cap (\Delta_1) \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ 3x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 12y = -3 \\ 6x - 6y = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I\left(-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)}$$

3. **تعيين قيم m حتى تكون النقطة $A(2;1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).**

$$A(2;1) \in (\Delta_m) \Rightarrow 2(m+2) + (m^2-4) + 1 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 = 0 \Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

4. **ليكن المستقيم (D) الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;1)$.**

أ. **كتابة معادلة المستقيم (D).**

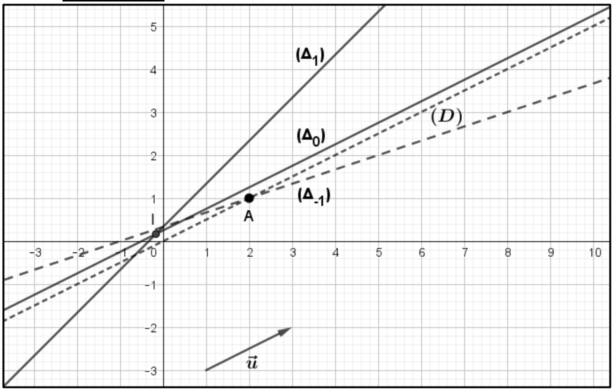
$$M(x;y) \in (D) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \vec{u} \Rightarrow x - 2 - 2(y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y = 0}$$

ب. تعيين قيم m حتى يكون المستقيمان (Δ_m) و(D) متوازيين.

ليكن $\vec{v}(-m^2+4;m+2)$ شعاع توجيه المستقيم (Δ_m).

$$(\Delta_m) \parallel (D) \Rightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Rightarrow -m^2+4-2(m+2)=0 \Rightarrow -m^2-2m=0$$

$$\Rightarrow \boxed{m=0}\,;(m\neq -2)$$



التمرين الرابع:

1. تعيين صورة المثلث OGB بـ:

أ. التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (D_1)

بما أنّ النقطة O تنتمي إلى (D_1) فهي ثابتة وصورة G هي L وصورة B هي A، فإنّ صورة المثلث OGB هي المثلث OLA.

ب. التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O

بما أنّ التناظر مركزه النقطة O فهي ثابتة وصورة G هي H وصورة B هي D، فإنّ صورة المثلث OGB هي المثلث OHD.

ج. الدوران الذي مركزه O وزاويته $120°$ في الاتجاه المباشر

بما أنّ الدوران مركزه النقطة O فهي ثابتة وصورة G هي E وصورة B هي A، فإنّ صورة المثلث OGB هي المثلث OEA.

2. بيان أنّ مساحة الدائرة (C') تساوي ربع مساحة الدائرة (C).

ليكن r وr' نصفي قطر الدائرتين (C) و(C') ، $\mathcal{A}$ و$\mathcal{A}'$ مساحتيهما على الترتيب.

لدينا: $\mathcal{A}=\pi r^2=\pi\times OA^2$ و $\mathcal{A}'=\pi r'^2=\pi\times OH^2$.

بما أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع، فإنّ النقطة O هي مركز ثقل للمثلث، أي:

$AO=\frac{2}{3}AG$ ومنه $OA=2OG$ أي $OA=2OH$ لأنّ $OG=OH$، إذن:

$$\mathcal{A}=\pi\times OA^2=\pi(2OH)^2=4\pi\times OH^2=4\mathcal{A}' \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}'=\frac{1}{4}\mathcal{A}}$$

سئل الخوارزمي عالم الرياضيات عن الإنسان فأجاب :

إذا كان الإنسان ذا أخلاق فهو = 1

وإذا كان ذا جمال فأضف إلى الواحد صفرا = 10

وإذا كان ذا مال أيضا فأضف صفرا آخر = 100

وإذا كان ذا حسب ونسب فأضف صفرا آخر = 1000

فإذا ذهب العدد واحد وهو الأخلاق

ذهبت قيمة الإنسان وبقيت الأصفار

نماذج من مسائل الرياضيات في الأولمبياد
مع حلولها المفصلة

التمرين 01:

نضع: $x-\frac{1}{x}=3$

1. بيّن أنّ $x^2+\frac{1}{x^2}=11$ وأنّ $x^3-\frac{1}{x^3}=36$
2. بسّط العبارة $\frac{a^2+3a}{a(a+6)+9}$ حيث $a>0$

التمرين 02:

بيّن أنّ:

$$\frac{-1+\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}=\frac{y}{x}$$

التمرين 03:

بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم:

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$$

التمرين 04:

بيّن أنّ:

$$ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$$

التمرين 05:

x و y عددان حقيقيان موجبان تماما. بيّن أنّ:

$$(1+x)(1+xy)(1+y)\ge 8xy$$

التمرين 06:

بيّن أنّ العدد $(n^2+3n+1)(n^2+3n+3)+1$ مربع تام.

التمرين 07:

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما حيث: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$

1. بيّن أنّ $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7$
2. عيّن قيمة $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}$
3. استنتج قيمة $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$

التمرين 08:

x و y عددان حقيقيان حيث: $x \geq \frac{1}{2}$ ، $y \leq 1$ و $x-y=3$

1. احسب $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$
2. بيّن أنّ $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ وّ $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$
3. بسّط العبارة $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

التمرين 09:

نضع: $x=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2019}{2020}$ و $y=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2020}{2021}$

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$
2. استنتج أنّ $x<\frac{1}{\sqrt{2021}}<y$

التمرين 10:

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما: $a+\frac{1}{a} \geq 2$
2. بيّن أنّ $x^2+y^2 \geq 2xy$ حيث x و y عددان حقيقيان موجبان تماما
3. استنتج أنّ $\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x} \geq 4$

حل التمرين 01:

1. بيان أنّ $x^2+\frac{1}{x^2}=11$ وأنّ $x^3-\frac{1}{x^3}=36$

$$x-\frac{1}{x}=3 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=9 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2x\left(\frac{1}{x}\right)=9 \Rightarrow \boxed{x^2+\frac{1}{x^2}=11}$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=33 \Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-\left(x-\frac{1}{x}\right)=33$$

$$\Rightarrow x^3-\frac{1}{x^3}-3=33 \Rightarrow \boxed{x^3-\frac{1}{x^3}=36}$$

2. تبسيط العبارة $\frac{a^2+3a}{a(a+6)+9}$ حيث $a>0$

$$\frac{a^2+3a}{a(a+6)+9}=\frac{a^2+3a}{a^2+6a+9}=\frac{a(a+3)}{(a+3)^2}=\boxed{\frac{a}{a+3}}$$

حل التمرين 02:

$$\frac{-1+\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}=\frac{\frac{-x+y+x}{x-y}}{\frac{x-y+y}{x-y}}=\frac{\frac{y}{x-y}}{\frac{x}{x-y}}=\boxed{\frac{y}{x}}$$

حل التمرين 03:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n+1}>\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n}>2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}} \ldots ①$$

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$\sqrt{n-1}<\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}-\sqrt{n-1}>\frac{1}{2\sqrt{n}} \ldots ②$$

$$① \text{ و } ② \Rightarrow \boxed{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}$$

حل التمرين 04:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \\ (b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2+c^2-2bc \geq 0 \Rightarrow 2bc \leq b^2+c^2 \\ (a-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+c^2-2ac \geq 0 \Rightarrow 2ac \leq a^2+c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca) \leq 2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2}$$

حل التمرين 05:

$$\begin{cases} \left(1-\sqrt{x}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x-2\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 2\sqrt{x} \\ \left(1-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 1+y-2\sqrt{y} \geq 0 \Rightarrow 1+y \geq 2\sqrt{y} \\ \left(1-\sqrt{xy}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow 1+xy-2\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow 1+xy \geq 2\sqrt{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1+x)(1+xy)(1+y) \geq 8xy}$$

حل التمرين 06:

$$a = n^2+3n \Rightarrow (n^2+3n+1)(n^2+3n+3)+1$$

$$= (a+1)(a+3)+1 = a^2+4a+4 = (a+2)^2$$

$$= \boxed{(n^2+3n+2)^2}$$

حل التمرين 07:

1. بيان أنّ $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2=9 \Rightarrow \boxed{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=7}$$

2. تعيين قيمة $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)=21 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=21$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=21-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=\boxed{18}$$

3. استنتاج قيمة $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+2\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2=5$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{5}}$$

حل التمرين 08:

1. حساب $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

$$E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$$

$$x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow 2x\geq 1\Rightarrow 2x-1\geq 0\Rightarrow |2x-1|=2x-1$$

$$y\leq 1\Rightarrow 2y\leq 2\Rightarrow 2y-2\leq 0\Rightarrow |2y-2|=-2y+2$$

$$E=2x-1-2y+2=2x-2y+1=2(x-y)+1=\boxed{7}$$

2. بيان أنّ $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$ وّ $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$

$$x-y=3\Rightarrow x=y+3\,;y\leq 1\Rightarrow y+3\leq 4\Rightarrow x\leq 4\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\leq x\leq 4}$$

$$x-y=3\Rightarrow y=x-3\,;x\geq\frac{1}{2}\Rightarrow x-3\geq -\frac{5}{2}\Rightarrow y\geq -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{5}{2}\leq y\leq 1}$$

3. تبسيط العبارة $F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 4 \\ -\frac{5}{2} \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \le x + y \le 5 \Rightarrow \begin{cases} -7 \le x + y - 5 \le 0 \\ 0 \le x + y + 2 \le 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x + y - 5| = -x - y + 5 \\ |x + y + 2| = x + y + 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = 7}$$

حل التمرين 09:

$$y = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2020}{2021} \text{ و } x = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2019}{2020}$$

1. بيان أنّ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$

$$\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1) - n^2}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} \ ;$$

$$\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}}$$

2. استنتاج أنّ $x < \frac{1}{\sqrt{2021}} < y$

$$\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ \vdots \\ \frac{2019}{2020} < \frac{2020}{2021} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2019}{2020} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2020}{2021} \Rightarrow \boxed{x < y}$$

$$x < y \Rightarrow \begin{cases} x^2 < xy \\ xy < y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 < xy < y^2 \Rightarrow x < \sqrt{xy} < y$$

$$\Rightarrow \boxed{x < \frac{1}{\sqrt{2021}} < y}$$

حل التمرين 10:

1. **بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما: $a+\frac{1}{a}\geq 2$**

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\Rightarrow a+\frac{1}{a}-2\geq 0\Rightarrow \boxed{a+\frac{1}{a}\geq 2}$$

2. **بيان أنّ $x^2+y^2\geq 2xy$ حيث x و y عددان حقيقيان موجبان تماما**

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\Rightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0\Rightarrow \boxed{x^2+y^2\geq 2xy}$$

3. **استنتاج أنّ $\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x}\geq 4$**

$$\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x}=\sqrt{\frac{x^2+1}{y}}^2+\sqrt{\frac{y^2+1}{x}}^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{y}}\sqrt{\frac{y^2+1}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x}\geq 2\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x}\geq 2\sqrt{\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\geq 2}\underbrace{\left(y+\frac{1}{y}\right)}_{\geq 2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2+1}{y}+\frac{y^2+1}{x}\geq 4}$$

فهرس

تم بحمد الله